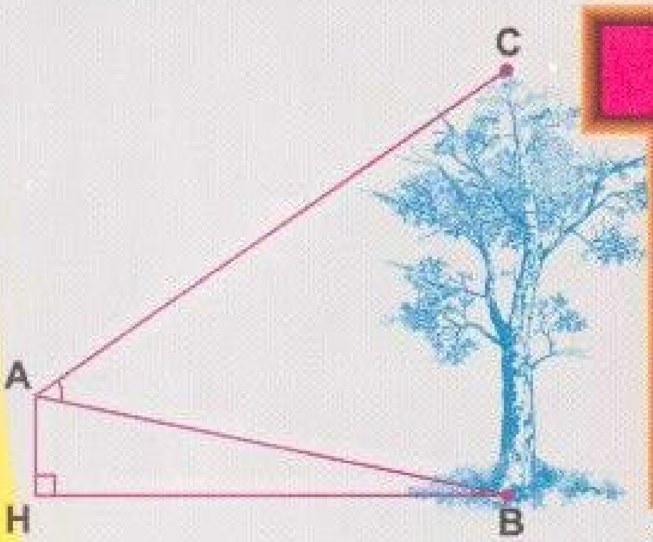
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

# GIẢI BÀI TẬP
# HÌNH HỌC
# 10
## NÂNG CAO



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

# *Giải bài tập*
# HÌNH HỌC 10

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

*Đơn vị liên kết* :
Công ty sách hoa hồng

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3030

# Lời nói đầu

*Quyển sách này được biên soạn theo chương trình giáo khoa Hình học 10 hiện hành, nhằm giúp các em học sinh không có điều kiện ôn tập theo nhóm, lớp có tài liệu tham khảo để so sánh với kết quả tự ôn tập của mình hoặc để tham khảo thêm nếu cần.*

*Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.*

**NHÓM BIÊN SOẠN**

## *Chương I.*

# VECTƠ

## §1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. **Khái niệm vectơ**

*Định nghĩa:* Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

2. **Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng**

*Định nghĩa:* Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

3. **Hai vectơ bằng nhau**

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

4. **Vectơ - không**

Với một điểm A bất kì ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không ($\vec{0}$).

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

b) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

***Trả lời***

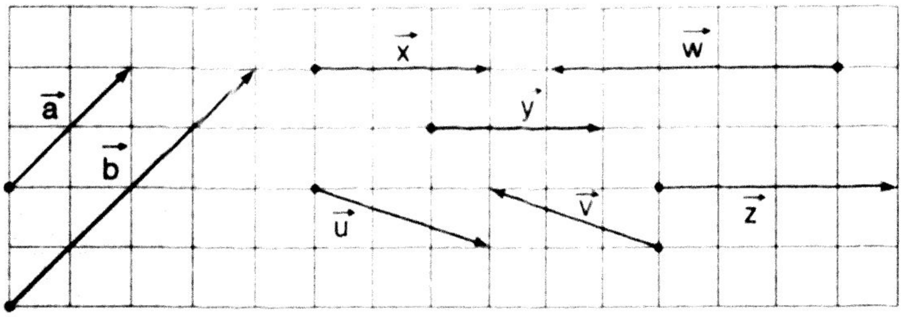
a) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Mệnh đề đúng.

b) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Mệnh đề đúng.

2. Trong hình dưới hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các vectơ bằng nhau.



*Trả lời*

Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ta có:

**a) Các vectơ cùng phương:**

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương;

$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương;

$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{w}$ và $\vec{z}$ cùng phương.

**b) Các vectơ cùng hướng:**

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng:

$\vec{x}$, $\vec{y}$ và $\vec{z}$ cùng hướng.

**c) Các vectơ ngược hướng:**

$\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng;

$\vec{w}$ và $\vec{x}$ ngược hướng;

$\vec{w}$ và $\vec{y}$ ngược hướng;

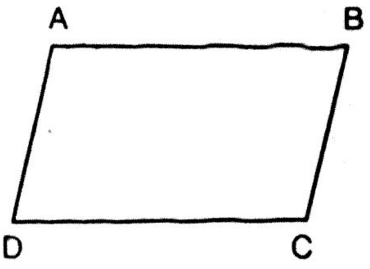
$\vec{w}$ và $\vec{z}$ ngược hướng.

**d) Các vectơ bằng nhau:**

$\vec{x}$ và $\vec{y}$.

**3.** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

*Giải*



**ABCD là hình bình hành** thì AB = DC và **$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng.**

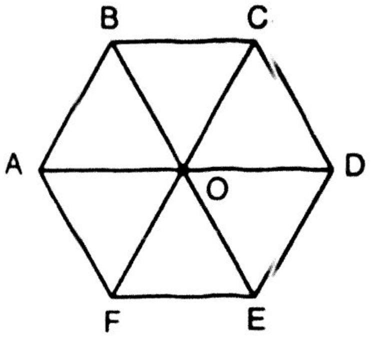
**Khi đó** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

**Ngược lại: nếu** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì AB = DC và **AB // DC do đó ABCD** là hình bình hành.

**4.** Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O.

a) Tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{OA}$;

b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.



*Giải*

a) Các vectơ khác $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với nó là:

$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EF}$

b) Các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ :

$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FO}$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

Chứng minh: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HC}$.

b) Gọi K là trung điểm của AH và I là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{IH}$ và $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{KH}$.

*Hướng dẫn:* Chứng minh các tứ giác BDCH và KOIH là hình bình hành.

**2.** Cho hình vuông ABCD tâm O. Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai trong các điểm A, B, C, D, O.

a) Hãy tìm các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}$.

b) Hãy tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}$.

**3.** Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vẽ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GC}$ và $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GB}$.

Chứng minh $\overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

*Hướng dẫn:* Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác.

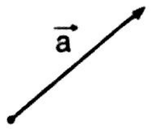
# §2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

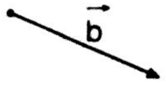
## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

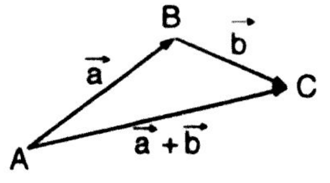
### 1. Tổng của hai vectơ

*Định nghĩa:* Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

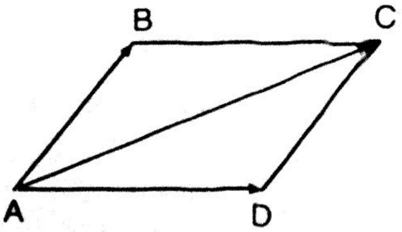
Phép toán tìm tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.







**2. Quy tắc hình bình hành**



Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

**3. Tính chất của phép cộng các vectơ**

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý ta có:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);

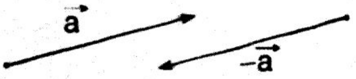
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).

**4. Hiệu của hai vectơ**

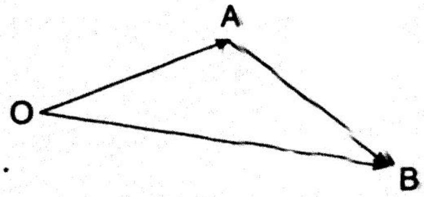
a) Vectơ đối:

Cho vectơ $\vec{a}$. Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.



Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ:



Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Vậy: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Với O, A, B tùy ý ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

**5. Áp dụng**

a) Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

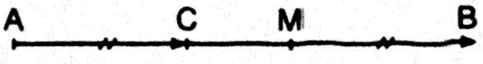
b) Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B sao cho AM > MB. Vẽ các vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.

*Giải*



Vẽ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB}$, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}$$

Theo định nghĩa hiệu của hai vectơ ta có:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$$

2. Cho hình bình hành ABCD và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

*Giải*

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\right)$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ (vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$)

3. Chứng minh rằng đối với tứ giác ABCD bất kì, ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

*Giải*

Ta có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;

$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.

Vậy: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

4. Cho tam giác ABC. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

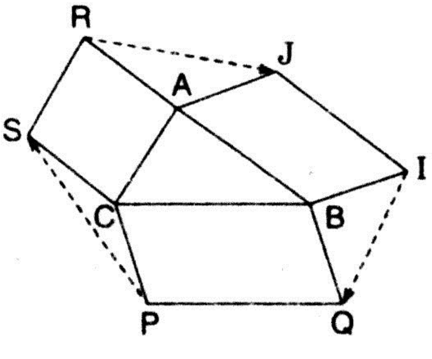
*Giải*

Ta có:

$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}\right) + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}\right) + \left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}\right)$

$= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \vec{0}$

vì $\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{PC}$.



5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

*Giải*

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

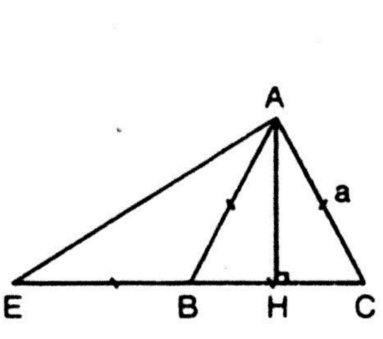
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = a$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$ thì $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AE}\right| = AE = \sqrt{AH^2 + HE^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$



**6.** Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Chứng minh rằng:

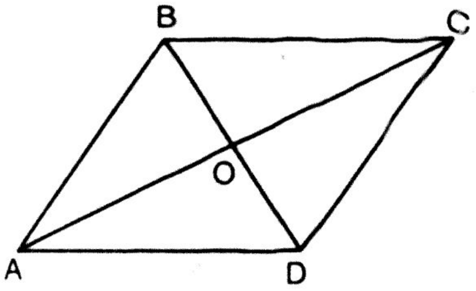
a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

### *Giải*



**Ta có:**

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$.

Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ nên $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$, vì $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$.

**7.** Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Khi nào có đẳng thức:

a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

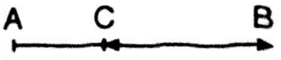
### *Giải*

a) Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác và AB + BC > AC.

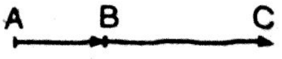
Vì $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ nên $|\vec{a} + \vec{b}| = AC < AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng ta có $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

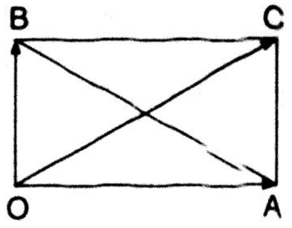


Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.



Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

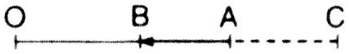
b) Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, ta dựng hình bình hành OACB. Khi đó $|\vec{a} + \vec{b}| = OC$. $|\vec{a} - \vec{b}| = AB$. Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ khi và chỉ khi hình bình hành là hình chữ nhật, nghĩa là các giá của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.



Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, giả sử: $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$

Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng ta có:

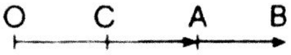
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = OB$$



$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right| = OC > OB$$

Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng ta có:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right| = OB$$



$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right| = OC < OB$$

Vậy $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

**8.** Cho $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

**Giải**

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{b}$

Vậy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài và ngược hướng ($\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau).

**9.** Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

**Giải**

Gọi $I_1$ là trung điểm của AD và $I_2$ là trung điểm của BC.

Ta có $\overrightarrow{AI_1} = \overrightarrow{I_1D}$ và $\overrightarrow{CI_2} = \overrightarrow{I_2B}$, do đó

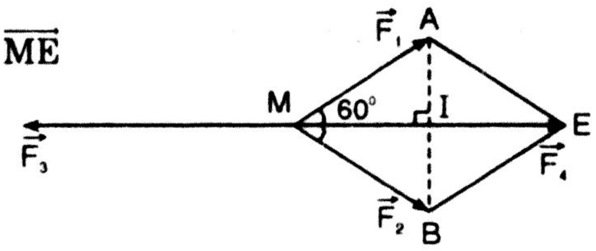
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI_1}+\overrightarrow{I_1I_2}+\overrightarrow{I_2B} = \overrightarrow{CI_2}+\overrightarrow{I_2I_1}+\overrightarrow{I_1D}\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI_1}-\overrightarrow{I_1D}\right)+\overrightarrow{I_1I_2} = \overrightarrow{I_2I_1}+\left(\overrightarrow{CI_2}-\overrightarrow{I_2B}\right)\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{I_1I_2} = \overrightarrow{I_2I_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1I_2} = \vec{0} \Leftrightarrow I_1 \equiv I_2\end{aligned}$$

**10.** Cho ba lực $\vec{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F_2} = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ đều là 100N và $\widehat{AMB} = 60^0$. Tìm cường độ và hướng của lực $\vec{F_3}$.

**Giải**

Vật đứng yên do $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3} = \vec{0}$.

Vẽ hình thoi MAEB ta có $\vec{F_1}+\vec{F_2} = \overrightarrow{ME}$



và lực $\vec{F_4} = \overrightarrow{ME}$ có cường độ là

$$ME = 2MI = 2.\frac{MA\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$$

Ta có $\vec{F_4}+\vec{F_3} = \vec{0}$, do đó $\vec{F_3}$ là vectơ đối của $\vec{F_4}$.

Như vậy $\overrightarrow{F_3}$ có cường độ là $100\sqrt{3}$ N và ngược hướng với $\overrightarrow{F_4}$ (như hìnlh vẽ).

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho lục giác đều ABCDEF và M tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$.

***Hướng dẫn:***

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FE}\right)$$

Chứng minh: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

**2.** Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác các hình bình hành ABMN, BCPQ, CARS.

Chứng minh: $\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{NR}+\overrightarrow{SP}=\vec{0}$

***Hướng dẫn:***

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BM};\ \overrightarrow{NR}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AR};\ \overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CP}$$

**3.** Cho bốn điểm A, B, C, D.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

**4.** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm độ dài các vectơ:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$$

**5.** Cho tam giác ABC, xác định điểm I thỏa điều kiện:

$$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

# §3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

**1. Định nghĩa:** Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

**2. Tính chất:** Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có:

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b};$$

$$(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a};$$

$$h(k\vec{a})=(hk)\vec{a};$$

$$1.\vec{a}=\vec{a};\ (-1).\vec{a}=-\vec{a}.$$

3. **Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác**

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$$

4. **Điều kiện để hai vectơ cùng phương**

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$) cùng phương là có một số k để $\vec{a}=k\vec{b}$.

5. **Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương**

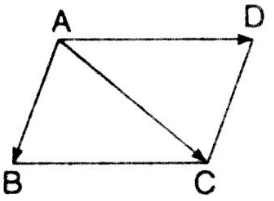
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành ABCD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

*Giải*



Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$

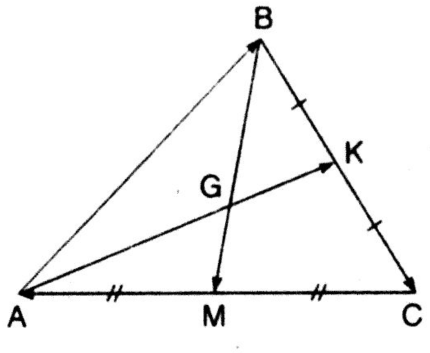
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}.$

2. Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC.

Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AK},\ \vec{v}=\overrightarrow{BM}$.

*Giải*

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{KA}$

$=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM}\right)=\frac{2}{3}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$

$=\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)-\overrightarrow{GB}$

$=-\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\vec{u}+\frac{4}{3}\vec{v}$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}-\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)$

$$= 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$$

$$= -\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$$

**Chú ý:** G là trọng tâm ΔABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

**3.** Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

### Giải

Ta có: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Vậy: $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$.

**4.** Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng

a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$;

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý.

### Giải

Ta có:

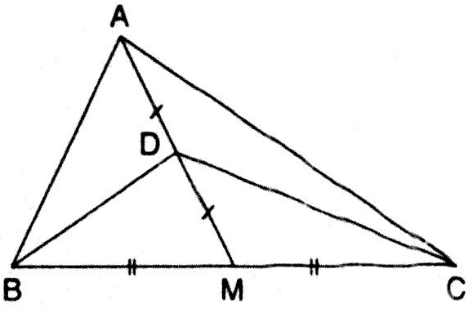
a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DM}$

$= 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}) = 2.\vec{0} = \vec{0}$

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}$

$= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM})$

$= 2(2.\overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{OD}$



**5.** Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

### Giải

Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}\right) + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}\right)$

$$= 2\overrightarrow{MN} + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) + \left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{MN} \text{ (vì } \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM} \text{ và } \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{ND})$$

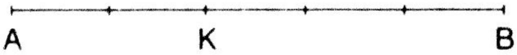
Tương tự: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}\right) + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}\right)$

$$= 2\overrightarrow{MN} + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}\right) = 2\overrightarrow{MN}$$

Vậy $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

6. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

*Giải*



Ta có: $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

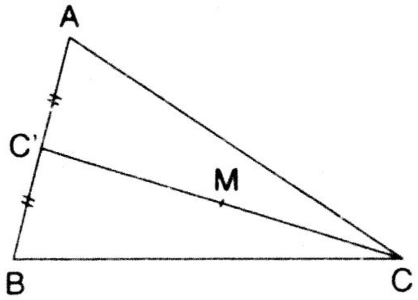
$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AK} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

7. Cho tam giác ABC.

Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

*Giải*



Gọi C′ là trung điểm của AB, ta có:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{MC'} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 2\left(\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Vậy điểm M là trung điểm của trung tuyến CC′.

8. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

*Giải*

Gọi G là trọng tâm tam giác MPR và G′ là trọng tâm tam giác NQS. Ta có:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'Q} + \overrightarrow{G'S} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} + \overrightarrow{G'E} + \overrightarrow{G'F}) = \vec{0}$$

Do đó:

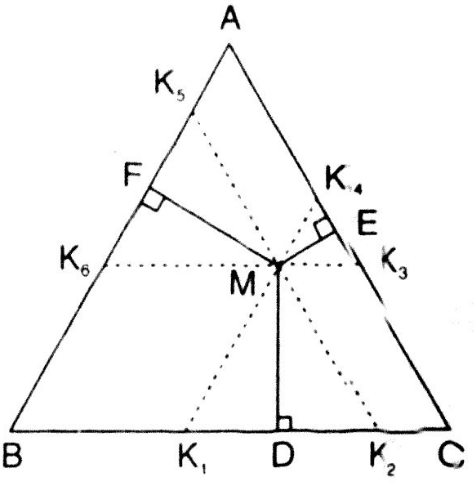
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} + \overrightarrow{G'E} + \overrightarrow{G'F}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'}\right) + \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BG'}\right) + \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CG'}\right) + \left(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DG'}\right) + \left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EG'}\right) + \left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FG'}\right)$$

$$= \vec{0}$$

$$\Rightarrow 6\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$$

9. Cho tam giác đều ABC có O là trọng tâm và M là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.



### *Giải*

Qua M kẻ các đường thẳng sau:

$K_1K_4 \parallel AB$,

$K_2K_5 \parallel AC$,

$K_3K_6 \parallel BC$

($K_1, K_2 \in BC$; $K_3, K_4 \in AC$; $K_5, K_6 \in AB$).

Ta có $MK_1K_2$, $MK_3K_4$, $MK_5K_6$ là các tam giác đều nên

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3} + \overrightarrow{MK_4} + \overrightarrow{MK_5} + \overrightarrow{MK_6})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_6}\right) + \left(\overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3}\right) + \left(\overrightarrow{MK_4} + \overrightarrow{MK_5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

(vì $MK_5AK_4$, $MK_3CK_2$, $MK_1BK_6$ là các hình bình hành).

Vậy: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}.3\overrightarrow{MO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

***Hướng dẫn:***

Áp dụng quy tắc ba điểm.

2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ c) $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

3. Cho tam giác ABC. Xác định điểm I, J, K thỏa các điều kiện sau:

$$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}\ ;\ 2\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

***Hướng dẫn:***

Chọn A làm gốc, biểu diễn $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

4. Cho hình bình hành ABCD. Xác định M thỏa: $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

***Hướng dẫn:***

Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

5. Cho A, B cố định. M tùy ý và điểm P là điểm xác định bởi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$. Chứng minh đường thẳng MP đi qua điểm cố định.

*Hướng dẫn:*

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Chứng minh M, P, I thẳng hàng do $\overrightarrow{MP} = 4\overrightarrow{MI}$

6. Cho tứ giác ABCD.

   a) Xác định điểm I thỏa $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

   b) Với M bất kì, chứng minh: $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$

   c) Cho điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MD}\right|$

   Chứng minh M chạy trên đường thẳng cố định.

*Hướng dẫn:*

a) Chọn A làm gốc ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\left(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

b) Áp dụng quy tắc ba điểm.

c) $3\left|\overrightarrow{MI}\right| = 3\left|\overrightarrow{MD}\right| \Leftrightarrow MI = MD$

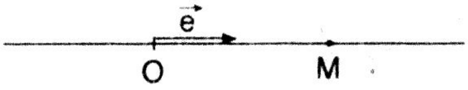
$\Leftrightarrow$ M chạy trên đường trung trực đoạn ID cố định.

# §4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. Trục và độ dài đại số trên trục

a) Trục tọa độ (còn gọi là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{e}$; kí hiệu $(O; \vec{e})$.



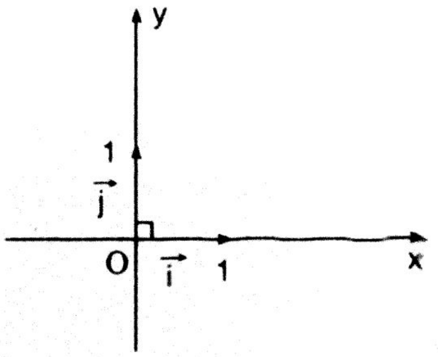
b) Cho M là một điểm tùy ý trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$. Ta gọi số k đó là tọa độ của điểm M đối với trục đã cho.

c) Cho hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a\vec{e}$. Ta gọi số a đó là độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overline{AB}$.

Nếu A, B trên trục $(O; \vec{e})$ lần lượt có tọa độ là $x_A$, $x_B$ thì $\overline{AB} = x_B - x_A$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3030

**2. Hệ trục tọa độ**



a) *Định nghĩa:* Hệ trục tọa độ $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ gồm hai trục $(O;\ \vec{i})$ và $(O;\ \vec{j})$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục $(O;\ \vec{i})$ được gọi là trục hoành và còn kí hiệu là Ox, trục $(O;\ \vec{j})$ được gọi là trục tung và còn kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Hệ trục tọa độ $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy.

b) * Tọa độ của vectơ: $\vec{u} = (x;\ y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

* Vectơ bằng nhau: Cho $\vec{u} = (x;\ y)$ ; $\vec{v'}\ (x';\ y')$

$$\vec{u} = \vec{v'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

c) Tọa độ của một điểm: $M(x;\ y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

d) Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A;\ y_A)$ và $B(x_B;\ y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A;\ y_B - y_A\right)$.

**3. Tọa độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$**

Ta có các công thức sau:

Cho $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$, $\vec{v} = (v_1;\ v_2)$. Khi đó:

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(u_1 + v_1;\ u_2 + v_2\right);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \left(u_1 - v_1;\ u_2 - v_2\right);$$

$$k\vec{u} = (ku_1;\ ku_2),\ k \in \mathbb{R}.$$

**4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và tọa độ của trọng tâm tam giác**

Giả sử $M(x_M;\ y_M)$, $N(x_N,\ y_N)$, trung điểm $P(x_P,\ y_P)$ của đoạn MN thì:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2};\ y_P = \frac{y_M + y_N}{2}$$

G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

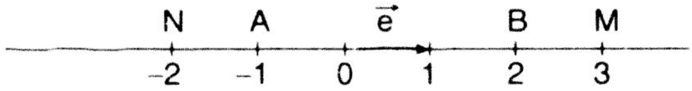
1. Trên trục $(0;\ \vec{e})$ cho các điểm A, B, M, N có tọa độ lần lượt là $-1$; 2; 3; $-2$.

a) Hãy vẽ trục và biểu diễn các điểm đã cho trên trục;

b) Tính độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$. Từ đó suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng.

***Giải***

a)



b) Áp dụng: $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Ta có: $\overline{AB} = 2 - (-1) = 3$, $\overline{MN} = -2 - 3 = -5$.

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng.

2. Trong mặt phẳng tọa độ các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\vec{a} = (-3; 0)$ và $\vec{i} = (1; 0)$ là hai vectơ ngược hướng;

b) $\vec{a} = (3; 4)$ và $\vec{b} = (-3; -4)$ là hai vectơ đối nhau;

c) $\vec{a} = (5; 3)$ và $\vec{b} = (3; 5)$ là hai vectơ đối nhau;

d) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

***Giải***

a) Vì $\vec{a} = -3\vec{i}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{i}$ ngược hướng. Mệnh đề đúng.

b) Ta có $\vec{a} = -\vec{b}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau. Mệnh đề đúng.

c) Ta có $-\vec{a} = (-5; -3) \neq \vec{b}$ nên mệnh đề sai.

d) Mệnh đề đúng.

3. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i}$;

b) $\vec{b} = -3\vec{j}$;

c) $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$;

d) $\vec{d} = 0,2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.

***Giải***

Ta có $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ nên:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} = (2\,;\,0)$

b) $\vec{b} = -3\vec{j} = (0; -3)$

c) $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} = (3\,;\,-4)$

d) $\vec{d} = 0,2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} = (0,2;\ \sqrt{3})$

4. Trong mặt phẳng Oxy, các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Toạ độ của điểm A là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$;

b) Điểm A nằm trên trục hoành thì có tung độ bằng 0;

c) Điểm A nằm trên trục tung thì có hoành độ bằng 0;

d) Hoành độ và tung độ của điểm A bằng nhau khi và chỉ khi A nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

### *Trả lời*

Các khẳng định a), b) và c) đúng.

Khẳng định d) sai, chẳng hạn A(–1; –1) nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ ba.

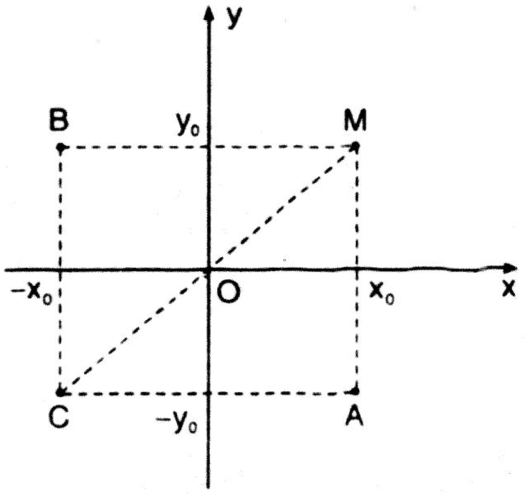
**5.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(x_0; y_0)$.

a) Tìm tọa độ của điểm A đối xứng với M qua trục Ox;

b) Tìm tọa độ của điểm B đối xứng với M qua trục Oy;

c) Tìm tọa độ điểm C đối xứng với M qua gốc O.

### *Giải*



a) A đối xứng với M qua trục Ox thì $A(x_0; -y_0)$;

b) B đối xứng với M qua trục Oy thì $B(-x_0; y_0)$;

c) C đối xứng với M qua gốc O thì $C(-x_0; -y_0)$.

**6.** Cho hình bình hành ABCD có A(–1; –2), B(3; 2), C(4; –1). Tìm tọa độ đỉnh D.

### *Giải*

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 + 1; 2 + 2) = (4; 4)$

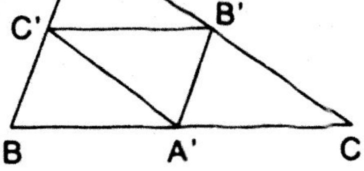
Gọi D (x; y) thì $\overrightarrow{DC} = (4 - x; -1 - y)$.

ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 4 \\ -1 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases}$

Vậy D(0; –5).

**7.** Các điểm A′(–4; 1), B′(2; 4) và C′(2; –2) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Tính tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác ABC và A′B′C′ trùng nhau.

### *Giải*



Ta có: $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = 2 - (-4) \\ y_A + 2 = 4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 8 \\ y_A = 1 \end{cases}$

Vậy A(8; 1).

Tương tự: $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{C'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x_B = 2 - 2 \\ 1 - y_B = 4 - (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -4 \\ y_B = -5 \end{cases}$

Vậy B(–4; –5).

$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C + 4 = 0 \\ y_C - 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -4 \\ y_C = 7 \end{cases}$$

Vậy C(–4; 7).

Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{8-4-4}{3}; \frac{1-5+7}{3}\right) = G(0; 1)$$

Tọa độ trọng tâm của tam giác A'B'C' là:

$$G'\left(\frac{-4+2+2}{3}; \frac{1+4-2}{3}\right) = G'(0; 1)$$

Vậy G ≡ G'.

**8.** Cho $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (1; 4)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{c} = (5; 0)$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

*Giải*

Giả sử $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2m + n \\ 0 = -2m + 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho tam giác ABC có các đỉnh A(1; –2), B(0; 4), C(3; 2). Tìm tọa độ điểm D thỏa một trong các trường hợp sau:

a. D là điểm đối xứng của A qua B.

b. ABCD là hình bình hành.

c. ABCD là hình thang có cạnh đáy AB và D nằm trên trục hoành.

***Hướng dẫn:***

a. B là trung điểm của AD, D(–1; 10)

b. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$, D(4; –4)

c. D(x; 0); $D\left(\frac{10}{3}; 0\right)$.

**2.** Cho A(1; 1), B(3; 2), C(m + 4; 2m + 1). Xác định m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

***Hướng dẫn:***

$\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

Suy ra m = 1.

**3.** Chứng minh các điểm sau đây là các đỉnh của một hình vuông:

A(2; 2); B(–1; 6); C(–5; 3); D(–2; –1)

*Hướng dẫn:*

Chứng minh: $\begin{cases} AB = BC = CD = DA \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 \end{cases}$

**4.** Cho hai điểm A(2; 4); B(–2; 1). Tìm điểm C trên trục hoành sao cho:

a) Tam giác ABC cân tại A.

b) Tam giác ABC cân tại C.

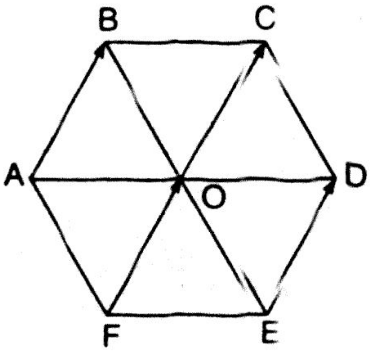
*Hướng dẫn:*

a) Gọi C (x, 0) tìm x sao cho AB = AC $\Rightarrow$ x = –1, x = 5

b) $C\left(\frac{15}{8};0\right)$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG I

**1.** Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Hãy chỉ ra các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối là O hoặc đỉnh của lục giác.



*Giải*

Các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ theo yêu cầu là:

$\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$

**2.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì cùng phương;

b) Hai vectơ $\vec{b}$ và $k\vec{b}$ cùng phương;

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $(-2)\vec{a}$ cùng hướng;

d) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng với vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

*Trả lời*

Các khẳng định đúng là a), b) và d).

Khẳng định c) sai: $\vec{a}$ và $(-2).\vec{a}$ ngược hướng.

**3.** Tứ giác ABCD là hình gì nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

*Giải*

Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì tứ giác ABCD là hình bình hành.

Ta lại có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow AB = BC$ nên tứ giác ABCD là hình thoi.

4. Chứng minh $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

*Giải*

Lấy A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

Khi đó: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

Ta luôn có AC ≤ AB + BC $\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho:

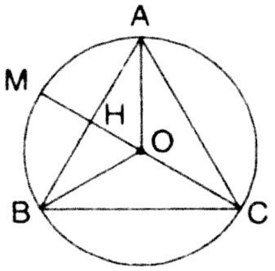
a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

b) $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

c) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$.

*Giải*

a) Kẻ đường kính CM, gọi H là trung điểm AB.



Ta có: $OH = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OM$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của OM.

Vậy OAMB là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Vậy M cần tìm là điểm đối xứng của C qua O.

b) N là điểm đối xứng của A qua O.

c) P là điểm đối xứng của B qua O.

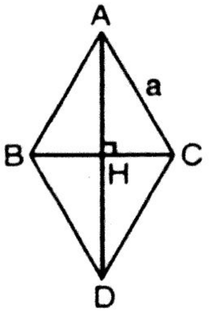
6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$;

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

*Giải*

a) Vẽ hình thoi ABDC ta có:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

Do đó: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$

$$= 2AH = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

b) Ta có: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = a$

7. Cho sáu điểm M, N, P, Q, R, S bất kì.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}$

*Giải*

Ta có: $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \left(\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SP}\right) + \left(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}\right) + \left(\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}\right)$

$$= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ} + \left(\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}\right)$$

$$= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}.$$

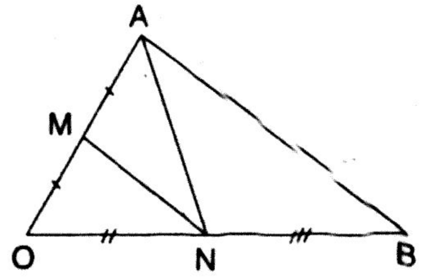
**8.** Cho tam giác OAB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tìm các số m, n sao cho

a) $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$;

b) $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$;

c) $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.



*Giải*

a) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ nên $m = \frac{1}{2}$; $n = 0$.

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ nên $m = -1$, $n = \frac{1}{2}$;

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ : $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{2}$;

d) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$: $m = -\frac{1}{2}$; $n = 1$.

**9.** Chứng minh rằng nếu G và G′ lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A′B′C′ thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

*Giải*

Ta có:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}\right) + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}\right) + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG''} + \overrightarrow{G'C'}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}$$

vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$.

**10.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau;

b) Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$ nếu $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0;

c) Vectơ $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0 thì cùng phương với vectơ $\vec{j}$.

*Giải*

Khẳng định a) và b) sai.

Khẳng định c) đúng vì $\vec{a} = (0, k) = k\vec{j}$.

**11**. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; -4)$, $\vec{c} = (-7 ; 2)$;

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$ ;

b) Tìm tọa độ vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ ;

c) Tìm các số k và h sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ .

*Giải*

a) $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} = (6 + 6 + 28; 3 - 8 - 8) = (40; -13)$

b) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = (8; -7)$

c) $k\vec{a} + h\vec{b} = (2k + 3h; k - 4h)$

$$\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 3h = -7 \\ k - 4h = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ h = -1 \end{cases}$$

**12**. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = m\vec{i} - 4\vec{j}$ . Tìm m để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

*Giải*

Ta có: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$

$\vec{v} = m\vec{i} - 4\vec{j} = (m; -4)$

$\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{m}{\frac{1}{2}} = \dfrac{-4}{-5} \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{5}$

**13**. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?

a) Điểm A nằm trên trục hoành thì có hoành độ bằng 0;

b) P là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi hoành độ của P bằng trung bình cộng các hoành độ của A và B;

c) Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì trung bình cộng các tọa độ tương ứng của A và C bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của B và D.

*Trả lời*

Khẳng định a) và b) sai.

Khẳng định c) đúng vì tâm I của hình bình hành là trung điểm của AC và BD.

# TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**1.** Cho tứ giác ABCD. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

A) 4; B) 6;
C) 8; D) 12

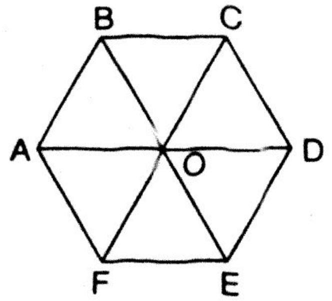
*Trả lời:*

Với hai điểm phân biệt A, B ta có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Tứ giác ABCD có 6 cặp đỉnh khác nhau, vậy có 12 vectơ. Chọn (D).

**2.** Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác bằng:

A) 4; B) 6;
C) 7; D) 8



*Trả lời:*

Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ thỏa yêu cầu là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FC}$ và $\overrightarrow{CF}$.

Có 6 vectơ. Chọn (B).

**3.** Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Số các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác đều là:

A) 2; B) 3;
C) 4; D) 6.

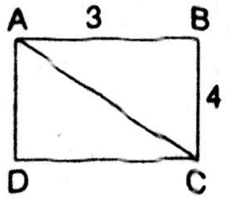
*Trả lời:*

Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{ED}$. Chọn (A).

**4.** Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 3, BC = 4.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là:

A) 5; B) 6;
C) 7; D) 9.



*Trả lời:*

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

Chọn (A).

**5.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$; B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$; D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

*Trả lời:*

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. Chọn (C).

**6.** Cho hai điểm phân biệt A và B. Điều kiện để điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A) IA = IB; B) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$;

C) $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; D) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$

***Giải:***

I là trung điểm AB khi IA = IB

và A, I, B thẳng hàng, tức $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Chọn (C).

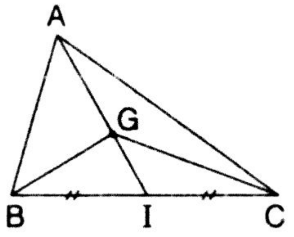
**7.** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$;

B) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$;

C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$;

D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.



***Trả lời:***

I là trung điểm BC nên:

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}.$$ Chọn (C).

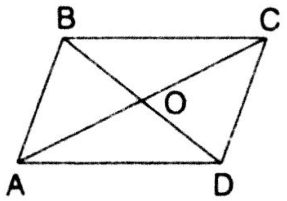
**8.** Cho hình bình hành ABCD. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$;

B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$;

C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$;

D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.



***Trả lời:***

Gọi O là tâm hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}\right) = 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Chọn (A).

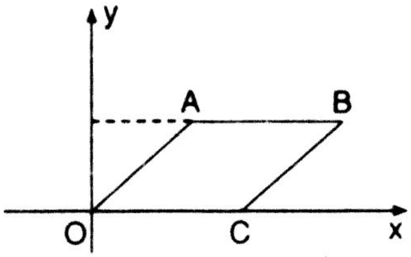
**9.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành OABC, C nằm trên Ox. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{AB}$ có tung độ khác 0;

B) A và B có tung độ khác nhau;

C) C có hoành độ bằng 0;

D) $x_A + x_C - x_B = 0$.



***Trả lời:*** Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow x_A + x_C = x_B$$

$$\Rightarrow \quad x_A + x_C - x_B = 0$$

Chọn (D).

**10**. Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v} = (1; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng;

B) $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương;

C) $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng;

D) $2\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

***Trả lời:***

* $\vec{u} + \vec{v} = (4; 4)$ nên (A) sai.

* Vì $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{6}$ nên (B) sai

* $2\vec{u} + \vec{v} = (7; 2)$ không cùng phương với $\vec{v}$ nên (D) sai.

* $\vec{u} - \vec{v} = (2; -8) = \frac{1}{3}\vec{b}$. Chọn (C).

**11**. Cho tam giác ABC có A(3; 5), B(1; 2), C(5; 2). Trọng tâm của tam giác ABC là :

| | |
|---|---|
| A) $G_1$ (–3; 4); | B) $G_2$ (4; 0); |
| C) $G_3$ ($\sqrt{2}$ ; 3); | D) $G_4$ (3; 3). |

***Trả lời:***

Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là

$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = 3;$$

$$y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = 3. \text{ Chọn (D).}$$

**12**. Cho bốn điểm A(1; 1), B(2; –1), C(4; 3), D(3; 5). Chọn mệnh đề đúng:

A) Tứ giác ABCD là hình bình hành;

B) Điểm G(2; $\frac{5}{3}$) là trọng tâm tam giác BCD;

C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

D) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

***Trả lời:***

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$; $\overrightarrow{DC} = (1; -2)$.

A, B, C không thẳng hàng. Vậy ABCD là hình bình hành. Chọn (A).

**13**. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm A(–5; –2), B(–5; 3), C(3; 3), D(3; –2). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng;

B) Tứ giác ABCD là hình chữ nhật;

C) Điểm I(–1; 1) là trung điểm của AC;

D) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

*Trả lời:*

A và B có cùng hoành độ nên AB // Oy.

B và C có cùng tung độ nên BC // Ox.

Cũng nhận xét như thế với C, D và A, D. Đáp án đúng là (B).

**14**. Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A) $2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + 2\vec{b}$;

B) $\vec{a} - 2\vec{b}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$;

C) $5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$;

D) $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$.

*Trả lời:*

$-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2(5\vec{a} + \vec{b})$. Chọn (C).

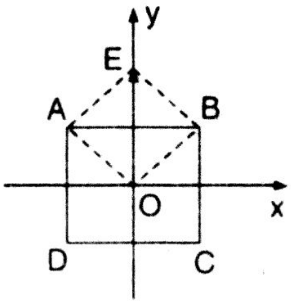
**15**. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có gốc O là tâm của hình vuông và các cạnh của nó song song với các trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = AB$;

B) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng;

C) $x_A = -x_C$ và $y_A = y_C$;

D) $x_B = -x_C$ và $y_C = -y_B$.



*Trả lời:*

(B), (C), (D) sai

$\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OE}\right| = OE = AB.$

Chọn (A).

**6**. Cho M(3; –4). Kẻ $MM_1$ vuông góc với Ox, $MM_2$ vuông góc với Oy. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{OM_1} = -3$;

B) $\overrightarrow{OM_2} = 4$;

C) $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ có tọa độ (–3; –4);

D) $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ có tọa độ (3; –4).

*Trả lời:*

$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM} = (3; -4)$. Chọn (D).

**17.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho A(2; –3), B(4; 7). Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

| | |
|---|---|
| A) (6; 4); | B) (2; 10); |
| C) (3; 2); | D) (8; –21). |

***Trả lời:***

Tọa độ trung điểm I của AB là

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = 3;$$

$$y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 2$$

Vậy I(3; 2). Chọn (C).

**18.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho A(5; 2), B(10; 8). Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

| | |
|---|---|
| A) (15; 10); | B) (2; 4); |
| C) (5; 6); | D) (50; 16). |

***Trả lời:***

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (5; 6)$. Chọn (C).

**19.** Cho tam giác ABC có B(9; 7), C(11; –1), M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tọa độ của $\overrightarrow{MN}$ là

| | |
|---|---|
| A) (2; –8); | B) (1; –4); |
| C) (10; 6); | D) (5; 3). |

***Trả lời:***

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \left(\frac{11-9}{2}; \frac{-1-7}{2}\right) = (1; -4)$. Chọn (B).

**20.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm: A(3; –2); B(7; 1); C(0; 1); D(–8, –5). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ đối nhau;

B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương nhưng ngược hướng;

C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và cùng hướng;

D) A, B, C, D thẳng hàng.

***Trả lời:***

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (7 - 3; 1 + 2) = (4; 3)$

$\overrightarrow{CD} = (-8 - 0; -5 - 1) = (-8; -6)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. Chọn (B).

**21.** Cho ba điểm A(–1; 5), B(5; 5), C(–1; 11). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) A, B, C thẳng hàng;

B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương;

C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương;

D) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương;

*Trả lời:*

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Chọn (C).

**22.** Cho $\vec{a} = (3; -4)$; $\vec{b} = (-1; 2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là:

A) $(-4; 6)$;
B) $(2; -2)$;
C) $(4; -6)$;
D) $(-3; -8)$.

*Trả lời:*

$\vec{a} + \vec{b} = (3 - 1; -4 + 2) = (2; -2)$. Chọn (B)

**23.** Cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (5; -7)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ là:

A) $(6; -9)$;
B) $(4; -5)$;
C) $(-6; 9)$;
D) $(-5; -14)$.

*Trả lời:*

$\vec{a} - \vec{b} = (-1 - 5; 2 + 7) = (-6; 9)$. Chọn (C).

**24.** Cho $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; x)$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương nếu có x là:

A) $-5$;
B) $4$;
C) $0$;
D) $-1$.

*Trả lời:*

Vì $\vec{a} = (-5; 0)$ nên $x = 0$. Chọn (C).

**25.** Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ nếu

A) $x = -15$;
B) $x = 3$;
C) $x = 15$;
D) $x = 5$.

*Trả lời:*

Ta có $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x - 15; 7)$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 15 \\ 7 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 15. \text{ Chọn (C).}$$

**26.** Cho A(1; 1), B(−2; −2), C(7; 7). Khẳng định nào sau đây đúng?

A) G(2; 2) là trọng tâm của tam giác ABC;

B) Điểm B ở giữa hai điểm A và C;

C) Điểm A ở giữa hai điểm B và C;

D) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

*Trả lời:*

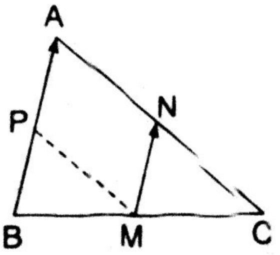
$\overrightarrow{AB} = (-3; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (6; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ A ở giữa B và C.

Chọn (C).

**27**. Các điểm M(2; 3), N(0; –4), P(–1; 6) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Tọa độ đỉnh A của tam giác là :

| | |
|---|---|
| A) (1; 5); | B) (–3; –1); |
| C) (–2; –7); | D) (1; –10). |

*Trả lời:*



Ta có: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 1 = 0 - 2 \\ y_A - 6 = -4 - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = -1 \end{cases}$.

Vậy A(–3; –1). Chọn (B).

**28**. Cho tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ O. Hai đỉnh A và B có tọa độ là A(–2; 2), B(3; 5). Tọa độ của đỉnh C là:

| | |
|---|---|
| A) (–1; –7); | B) (2; –2); |
| C) (–3; –5); | D) (1; 7). |

*Trả lời:*

O là trọng tâm $\Delta ABC$ nên:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_0 \\ y_A + y_B + y_C = 3y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 3 + x_C = 0 \\ 2 + 5 + y_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -7 \end{cases}$$

Vậy C(–1; –7). Chọn (A).

**29**. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

A) Hai vectơ $\vec{a} = (-5; 0)$ và $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng hướng;

B) Vectơ $\vec{c} = (7; 3)$ là vectơ đối của $\vec{d} = (-7; 3)$;

C) Hai vectơ $\vec{u} = (4; 2)$ và $\vec{v} = (8; 3)$ cùng phương;

D) Hai vectơ $\vec{a} = (6; 3)$ và $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

*Trả lời:*

Ta có: $\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b}$. Chọn (A).

**30**. Trong hệ trục $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ là :

| | |
|---|---|
| A) (0; 1); | B) (–1; 1); |
| C) (1; 0); | D) (1; 1). |

*Trả lời:*

$\vec{i} + \vec{j} = (1; 0) + (0; 1) = (1; 1)$. Chọn (D).

# BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}$

c) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

d) $6\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$ với M tùy ý.

e) Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|=6\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}\right|$$

2. Cho ba điểm A, B, C và ba số α, β, δ. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha+\beta+\delta=0$, thì vectơ $\vec{v}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Nếu $\alpha+\beta+\delta\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\delta\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và M tùy ý ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MI}$

3. a) Xác định điểm I thỏa:

$$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa:

$$\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$$

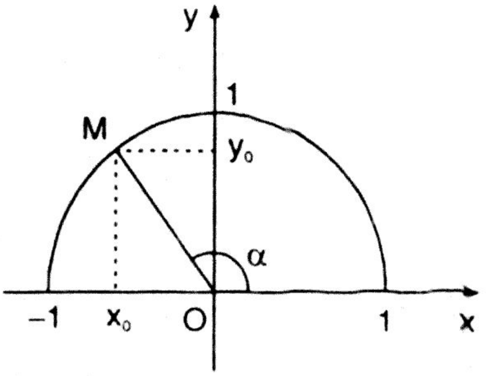
## *Chương II.*

# TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

---

## §1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ $0^0$ ĐẾN $180^0$

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN



1. **Định nghĩa:** Với mỗi góc α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$. Khi đó ta định nghĩa:
   - sin của góc α là $y_0$, kí hiệu $\sin\alpha = y_0$;
   - côsin của góc α là $x_0$, kí hiệu $\cos\alpha = x_0$;
   - tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \ne 0$), kí hiệu $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
   - côtang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \ne 0$), kí hiệu $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

   Các số sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các giá trị lượng giác của góc α.

2. **Tính chất**

   $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ ;  $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

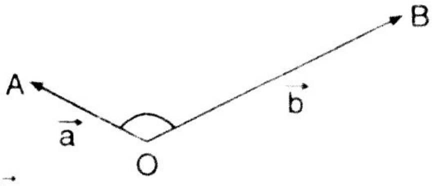
   $\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha$ ;  $\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha$

3. **Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt**

| α<br>Giá trị lượng giác | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $180^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sinα | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| cosα | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| tanα | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ‖ | 0 |
| cotα | ‖ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | ‖ |

### 4. Góc giữa hai vectơ

*Định nghĩa:* Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ $0^0$ đến $180^0$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin A = \sin(B + C)$; b) $\cos A = -\cos(B + C)$.

***Giải***

a) Vì $A + B + C = 180^0$ nên $\sin A = \sin[180^0 - (B + C)] = \sin(B + C)$

b) Vì $A + B + C = 180^0$ nên $\cos A = -\cos[180^0 - (B + C)] = -\cos(B + C)$

**2.** Cho AOB là tam giác cân tại O có OA = a và có các đường cao OH và AK. Giả sử $\widehat{AOH} = \alpha$. Tính AK và OK theo a và $\alpha$.

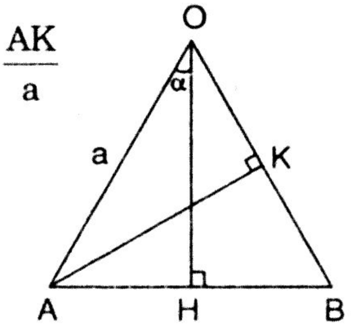
***Giải***

Xét tam giác vuông OAK ta có: $\sin\widehat{AOK} = \sin 2\alpha = \dfrac{AK}{OA} = \dfrac{AK}{a}$

Vậy AK = $a\sin 2\alpha$

$$\cos\widehat{AOK} = \cos 2\alpha = \frac{OK}{OA} = \frac{OK}{a}.$$

Vậy OK = $a.\cos 2\alpha$.



**3.** Chứng minh rằng:

a) $\sin 105^0 = \sin 75^0$; b) $\cos 170^0 = -\cos 10^0$; c) $\cos 122^0 = -\cos 58^0$.

***Giải***

a) $\sin 105^0 = \sin(180^0 - 75^0) = \sin 75^0$

b) $\cos 170^0 = \cos(180^0 - 10^0) = -\cos 10^0$

c) $\cos 122^0 = \cos(180^0 - 58^0) = -\cos 58^0$

**4.** Chứng minh rằng với mọi góc $\alpha$ ($0^0 \le \alpha \le 180^0$) ta đều có $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

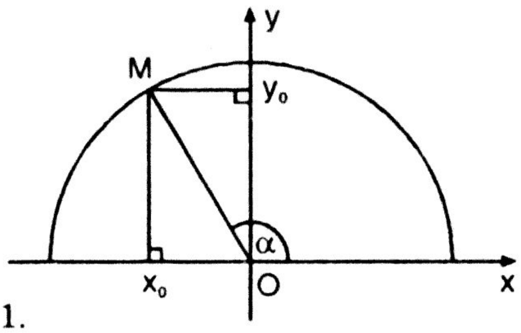
***Giải***

Giả sử $M(x_0; y_0)$ nằm trên nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Theo định nghĩa giá trị lượng giác của góc $\alpha$ bất kì $0^0 \le \alpha \le 180^0$ ta có:

$\cos\alpha = x_0$, $\sin\alpha = y_0$

mà $x_0^2 + y_0^2 = OM^2 = 1$ nên $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.



**5.** Cho góc x, với $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = 3\sin^2 x + \cos^2 x$.

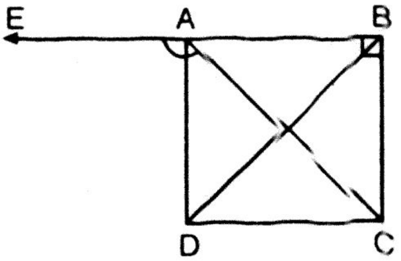
*Giải*

Áp dụng công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Ta có: $P = 3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 - 2\cos^2 x = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 - \frac{2}{9} = \frac{25}{9}$

**6.** Cho hình vuông ABCD. Tính: $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$, $\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)$, $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$..

*Giải*



Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$ ta có:

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \cos 135^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vì AC ⊥ BD nên $\sin\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \sin 90^0 = 1$

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \cos 180^0 = -1.$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho $\cos x = \frac{1}{3}$; tính $2\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$.

**2.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

c) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

**3.** Cho $\tan\alpha = 2$. Tính $\dfrac{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}$

*Hướng dẫn:* Chia tử và mẫu cho $\cos\alpha$.

**4.** Cho $\tan\alpha - \cot\alpha = a$, tính:

$$A = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha;\quad B = \tan^3\alpha + \cot^3\alpha;\quad C = \tan^4\alpha - \cot^4\alpha$$

*Hướng dẫn:* Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

**5.** Chứng minh rằng:

a) $\tan^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha.\tan^2\alpha$

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

c) $\dfrac{\tan\alpha - \sin\alpha}{\sin^3\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha(1 + \cos\alpha)}$

**6.** Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^0$.

Tính $\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}\right)$.

# §2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. **Định nghĩa:** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

2. ***Các tính chất của tích vô hướng***

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);

$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$;

$\vec{a}^2 \geq 0, \quad \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

*Nhận xét:* Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. **Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**

Cho $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

*Nhận xét:* $\vec{a}.\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$ thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

4. **Ứng dụng**

a) Độ dài của vectơ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

b) Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$

Khi đó $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm

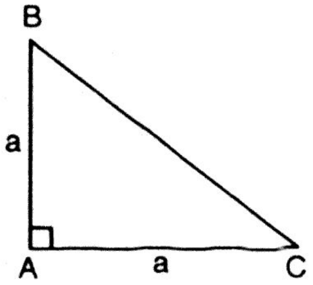
Cho $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Cho tam giác vuông cân ABC có AB = AC = a. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

*Giải*



Ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\widehat{BAC} = a.a.\cos 90^0 = 0$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -CA.CB.\cos\widehat{ACB} = -CA.CB.\cos 45^0$$

$$= -a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$$

**2.** Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và biết OA = a, OB = b. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

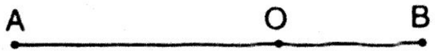
a) Điểm O nằm ngoài đoạn AB;

b) Điểm O nằm trong đoạn AB.

*Giải*

a) Khi O nằm ngoài đoạn AB ta có:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = a.b.\cos 0^0 = a.b$$



b) Khi O nằm giữa hai điểm A và B ta có:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = a.b.\cos 180^0 = -a.b$$

**3.** Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB = 2R. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$;

b) Hãy dùng kết quả câu a) để tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN}$ theo R.

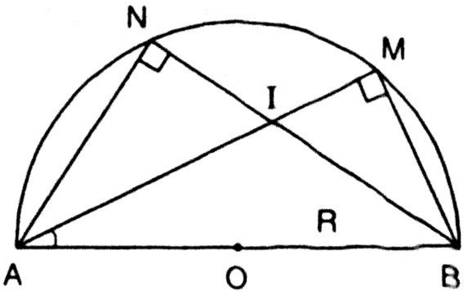
*Giải*

a) Ta có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = AI.AM.\cos\left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM}\right)$

$$= AI.AM.\cos 0^0 = AI.AM \qquad (1)$$

và $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = AI.AB.\cos\widehat{IAB}$

$$= AI.AB.\frac{AM}{AB} = AI.AM \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$

Tương tự $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = BI.BN$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = BI.BA.\cos\widehat{IBA}$$

$$= BI.BA.\frac{BN}{BA} = BI.BN$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$

* *Cách khác:*

Ta có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BM} = 0$ (vì $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BM}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$

Tương tự: $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$

b) Áp dụng câu a) ta có

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2$$

**4.** Trên mặt phẳng Oxy, cho hai điểm A(1; 3), B(4; 2).

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho DA = DB;

b) Tính chu vi tam giác OAB;

c) Chứng tỏ OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB.

***Giải***

a) Giả sử $D(x_D; 0)$ nằm trên trục Ox.

Ta có: $DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow (1 - x_D)^2 + 3^2 = (4 - x_D)^2 + 2^2$

$$\Leftrightarrow x_D^2 - 2x_D + 1 + 9 = x_D^2 - 8x_D + 16 + 4 \Leftrightarrow x_D = \frac{5}{3}$$

Vậy $D\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

b) Ta có: $OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ; $OB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{10}$

Chu vi tam giác OAB là:

$2p = OA + OB + AB = \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} + \sqrt{2}.\sqrt{10} = \sqrt{10}(2 + \sqrt{2})$

c) Vì $OA = AB = \sqrt{10}$ và $OB = \sqrt{20}$ nên $OB^2 = OA^2 + AB^2$

Vậy tam giác OAB vuông cân tại A.

Diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}OA.AB = \frac{1}{2}.\sqrt{10}.\sqrt{10} = 5$ (đvdt)

* *Cách khác:*

Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 3)$; $\overrightarrow{AB} = (3; -1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} = 1.3 - 3.1 = 0 \Rightarrow OA \perp AB$

**5.** Trên mặt phẳng Oxy hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau :

a) $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (6; 4)$;

b) $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$;

c) $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (3; \sqrt{3})$

*Giải*

a) Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 2.6 + -3.4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ hay $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$.

b) Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 3.5 + 2.(-1) = 13$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\ ;\ |\vec{b}| = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^0$$

c) $\vec{a}.\vec{b} = (-2).3 + (-2\sqrt{3}).\sqrt{3} = -6 - 6 = -12$

$$|\vec{a}| = 4;\ |\vec{b}| = 2.\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{-12}{4.2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 150^0$$

**6.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm A(7; –3); B(8; 4); C(1; 5); D(0; –2). Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình vuông.

*Giải*

Ta có: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8-7)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(1-8)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(0-1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ AB = BC = CD = DA nên tứ giác ABCD là hình thoi.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$; $\overrightarrow{AD} = (-7; 1)$

nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 1.(-7) + 7.1 = 0 \Leftrightarrow AB \perp AD$

Vậy hình thoi ABCD có một góc vuông nên tứ giác ABCD là hình vuông.

**7.** Trên mặt phẳng Oxy cho điểm A(–2; 1). Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O. Tìm tọa độ của điểm C có tung độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông ở C.

*Giải*

Ta có B(2; –1) là điểm đối xứng với A qua O.

Gọi C(x; 2) ta có: $\overrightarrow{CA} = (-2 - x; -1)$; $\overrightarrow{CB} = (2 - x; -3)$

$\Delta ABC$ vuông tại C $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2 - x)(2 - x) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy có hai điểm cần tìm là: C(1; 2) và C′(–1; 2)

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, $\widehat{A} = 60^0$

   a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ ;　　　　b) Tính BC.

2. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC}$

3. Cho tam giác ABC có AB = 3, BC = 6, CA = 8.

   a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và góc A.　　　　b) Tính độ dài trung tuyến AM.

   c) Xác định điểm I thỏa $5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.　　　　d) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IA}$ và BI.

4. Cho tam giác ABC có AB = 3, BC = 4, CA = 6. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.

5. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC có độ dài ba cạnh a, b, c. Chứng minh rằng: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

*Hướng dẫn:* $GA^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9}.\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

6. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) = 0$$

*Hướng dẫn:* Gọi I, J là điểm thỏa: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Tập hợp M là đường tròn đường kính IJ.

# §3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. Định lí côsin

a) Trong tam giác ABC bất kì với BC = a, CA = b, AB = c ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

b) Hệ quả: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

c) Áp dụng: Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác.

Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a, CA = b và AB = c. Gọi $m_a$, $m_b$ và $m_c$ là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B và C của tam giác. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}; \qquad m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}; \qquad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$

2. **Định lí sin**

Trong tam giác ABC bất kì với BC = a, CA = b, AB = c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. **Công thức tính diện tích tam giác**

Ta kí hiệu $h_a$, $h_b$, $h_c$ là các đường cao của tam giác ABC lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C và S là diện tích tam giác đó.

Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác.

Diện tích S của tam giác ABC được tính theo một trong các công thức sau:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B;$$

$$S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = pr;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Hê-rông).}$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{B} = 58^0$ và cạnh a = 72cm. Tính $\widehat{C}$, cạnh b, cạnh c và đường cao $h_a$.

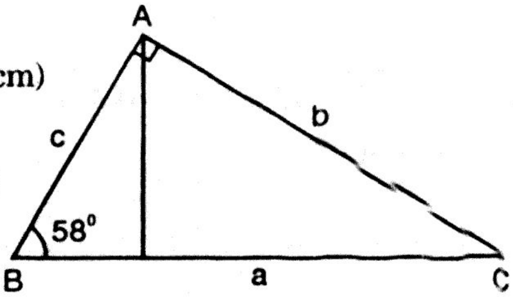
*Giải*

Ta có: $\hat{C} = 90^0 - \hat{B} = 90^0 - 58^0 = 32^0$

$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\sin B = 72.\sin 58^0 \approx 61,06$ (cm)

$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\sin C = 72.\sin 32^0 \approx 38,15$ (cm)

$a.h_a = bc \Rightarrow h_a = \frac{b.c}{a} \approx 32,36$ (cm)



2. Cho tam giác ABC biết các cạnh a = 52,1cm, b = 85cm và c = 54cm Tính các góc $\hat{A}, \hat{B}$ và $\hat{C}$.

*Giải*

Áp dụng định lí côsin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{7225+2916-2714,41}{2.85.54} \approx 0,8090 \Rightarrow \hat{A} \approx 36^0.$$

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$$\Rightarrow \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2714,41 + 2916 - 7225}{2.52,1.54} \approx -0,2834$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{B} \approx 106^0 28'.$$

Vậy $\widehat{C} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 37^0 32'$.

**3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$, cạnh b = 8cm và c = 5cm. Tính cạnh a và các góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ của tam giác đó.

*Giải*

Áp dụng định lí côsin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 129$$

$\Rightarrow$ $a \approx 11,36$ (cm). Ta có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$$\Rightarrow \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{129 + 5^2 - 8^2}{2.11,36.5} \approx 0,79.$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{B} \approx 37^0 48'.$$

Vậy $\widehat{C} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 22^0 12'$.

**4.** Tính diện tích S của tam giác có số đo các cạnh lần lượt là 7, 9 và 12.

*Giải*

Áp dụng công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Ta có: $p = \frac{1}{2}(7 + 9 + 12) = 14$

$$\Rightarrow \quad S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} \approx 31,3 \text{ (đvdt)}.$$

**5.** Tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$. Tính cạnh BC cho biết cạnh AC = m và AB = n.

*Giải*

Ta có b = m, c = n, $\widehat{A} = 120^0$. Tính a.

Áp dụng định lí côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = m^2 + n^2 - 2m.n.\cos 120^0 = m^2 + n^2 + mn$$

$$\Rightarrow \quad BC = a = \sqrt{m^2 + n^2 + mn}$$

**6.** Tam giác ABC có các cạnh a = 8cm, b = 10cm và c = 13cm.

a) Tam giác đó có góc tù không?

b) Tính độ dài trung tuyến MA của tam giác ABC đó.

*Giải*

a) Nếu tam giác ABC có góc tù thì góc tù đó phải đối diện với cạnh lớn nhất là c = 13cm. Ta tính góc C.

Ta có công thức: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\Rightarrow 169 = 64 + 100 - 2.8.10.\cos C$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{64 + 100 - 169}{2.8.10} = -\frac{5}{160} \Rightarrow \widehat{C} = 91^0 47'$$ là góc tù của tam giác.

b) Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến

Ta có: $$MA^2 = m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_a^2 = \frac{2(10^2 + 13^2) - 8^2}{4} \approx 118,5$$

$\Rightarrow \quad m_a \approx 10,89$ (cm)

**7.** Tính góc lớn nhất của tam giác ABC biết:

a) Các cạnh a = 3cm, b = 4cm và c = 6cm;

b) Các cạnh a = 40cm, b = 13cm và c = 37cm.

*Giải*

a) Vì cạnh c = 6cm lớn nhất nên góc C lớn nhất, ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2.3.4} = -\frac{11}{24}$$

$\Rightarrow \quad \widehat{C} \approx 117^0 16'$.

b) Vì cạnh a = 40cm lớn nhất nên góc A lớn nhất, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 37^2 - 40^2}{2.13.37} = -\frac{62}{962} \approx 0,064$$

$\widehat{A} \approx 93^0 41'$.

**8.** Cho tam giác ABC biết cạnh a = 137,5cm, $\widehat{B} = 83^0$ và $\widehat{C} = 57^0$. Tính góc A, bán kính R của đường tròn ngoại tiếp cạnh b và c của tam giác.

*Giải*

Ta có $\widehat{A} = 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^0 - 140^0 = 40^0$

Áp dụng định lí sin ta có: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Suy ra: $$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{137,5}{\sin 40^0} \approx \frac{137,5}{0,6429} \approx 214 \text{ (cm)}$$

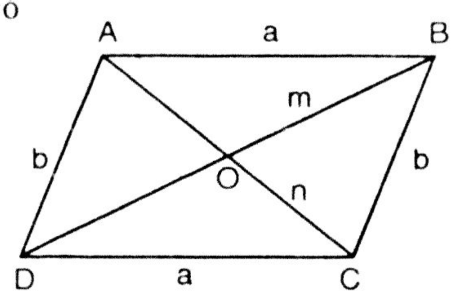
$b = 2R\sin B = 2R\sin 83^0 \approx 212,31$ (cm)

$c = 2R\sin C = 2R\sin 57^0 \approx 179,40$ (cm)

**9.** Cho hình bình hành ABCD có AB = a, BC = b, BD = m và AC = n. Chứng minh rằng $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

*Giải*

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.



Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có

$$m^2 + n^2 = 4(AO^2 + BO^2)$$

Mà $AO^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{m^2}{4}$

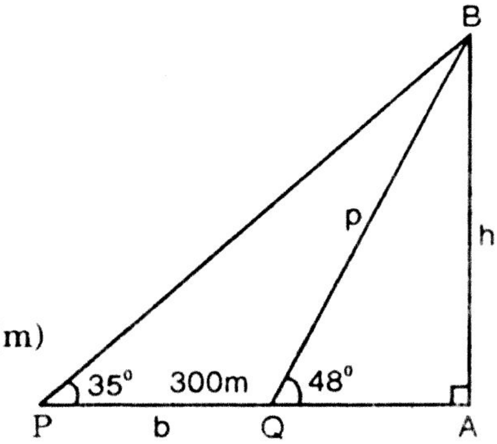
và $BO^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4}$

nên $m^2 + n^2 = 4\left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{m^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4}\right)$

$$= 4(a^2 + b^2) - m^2 - n^2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2).$$

**10**. Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau 300m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^0$ và $\widehat{BQA} = 48^0$. Tính chiều cao của tháp.

*Giải*



Xét tam giác BPQ.

Ta có: $\widehat{PBQ} = 48^0 - 35^0 = 13^0$.

Áp dụng định lí sin:

Ta có: $\frac{BQ}{\sin P} = \frac{PQ}{\sin B} \Rightarrow \frac{BQ}{\sin 35^0} = \frac{300}{\sin 13^0}$

Do đó: $BQ = \frac{300.\sin 35^0}{\sin 13^0} \Rightarrow BQ = 764{,}935$ (m)

Chiều cao AB của tháp:

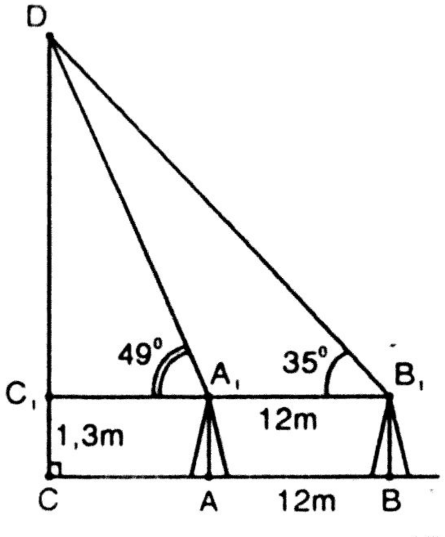
Ta có: $\sin Q = \frac{AB}{BQ} \Rightarrow AB = BQ.\sin 48^0 = 764{,}935.\sin 48^0 = 568{,}457$ (m)

**11**. Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận, người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách AB = 12m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao h = 1,3m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm $A_1$, $B_1$ cùng thẳng hàng với $C_1$ thuộc chiều cao CD của tháp.

Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^0$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^0$.

Tính chiều cao CD của tháp đó.

*Giải*



Tam giác $DA_1B_1$ có $\widehat{A_1DB_1} = 49^0 - 35^0 = 14^0$

Theo định lí sin trong $\Delta DA_1B_1$

Ta có: $\frac{A_1B_1}{\sin D} = \frac{A_1D}{\sin 35^0} \Leftrightarrow \frac{12}{\sin 14^0} = \frac{A_1D}{\sin 35^0}$

$$\Rightarrow A_1D = \frac{12.\sin 35^0}{\sin 14^0} \approx 28,451(m)$$

Trong tam giác vuông $A_1C_1D$ ta có:

$$\sin 49^0 = \frac{C_1D}{A_1D}$$

$$\Rightarrow C_1D = A_1D\sin 49^0 = 28,451.\sin 49^0 \approx 21,472\ (m)$$

Chiều cao CD của Tháp Chàm là:

$$CD = C_1D + C_1C \approx 21,472 + 1,3 = 22,772\ (m)$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho tam giác ABC có $b + c = 2a$.

Chứng minh rằng: a) $\sin B + \sin C = 2\sin A$

b) $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$

**2.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

**3.** Cho tam giác ABC thỏa $a = b\cos C$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

***Hướng dẫn:*** Áp dụng định lí cosin.

**4.** Cho tam giác ABC thỏa điều kiện $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$.

Chứng minh $\hat{A} = 60^0$.

**5.** Cho tam giác ABC có trung tuyến $AM = \frac{c}{2}$.

Chứng minh rằng $2b^2 = a^2 - c^2$ và $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$.

**6.** Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 14,\ c = 10,\ \hat{A} = 145^0$;

b) $a = 7,\ b = 9,\ c = 10$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Nhắc lại định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tích vô hướng này với $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ không đổi đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi nào?

*Giải*

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ không đổi thì tích vô hướng $\vec{a}, \vec{b}$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ tương ứng đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Do đó: $\vec{a}.\vec{b}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$ (khi đó $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0$)

$\vec{a}.\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$ (khi đó $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^0$)

2. Trong mặt phẳng Oxy cho vectơ $\vec{a} = (-3; 1)$ và vectơ $\vec{b} = (2; 2)$, hãy tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$.

*Giải*

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = (-3).2 + 1.2 = -4$.

3. Hãy nhắc lại định lí côsin trong tam giác. Từ các hệ thức này hãy tính cosA, cosB và cosC theo các cạnh của tam giác.

*Trả lời*

Định lí cosin trong tam giác: Trong tam giác ABC bất kì với ba góc A, B, C và AB = c, BC = a, CA = b, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Từ các hệ thức trên, ta suy ra:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4. Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ trong tam giác, hãy suy ra định lí Py-ta-go.

*Giải*

Theo hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ trong tam giác, nếu góc $A = 90^0$ thì:

$a^2 = b^2 + c^2$ (vì $\cos A = 0$).

5. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

*Giải*

Theo định lí sin trong tam giác ABC, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Từ đó suy ra: a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC.

**6.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

*Giải*

Áp dụng định lí cosin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Do đó:

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù $\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

**7.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, BC = 6. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

*Giải*

Ta có $\widehat{A} = 60^0$, a = 6. Theo định lí sin ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = 2\sqrt{3}$.

**8.** Cho tam giác ABC có a = 12, b = 16, c = 20. Tính diện tích S của tam giác, chiều cao $h_a$, các bán kính R, r của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và đường trung tuyến $m_a$ của tam giác.

*Giải*

Theo công thức Hê-rông: $p = \dfrac{1}{2}(12 + 16 + 20) = 24$ ta có

$$S = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = 96;$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a \quad \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = 16;$$

$$S = \frac{abc}{4R} \quad \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{12.16.20}{4.96} = 10$$

$$S = pr \quad \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{96}{24} = 4$$

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} = \frac{2\left(16^2 + 20^2\right) - 12^2}{4} = 292 \Rightarrow m_a \approx 17{,}09.$$

**9.** Trong tập hợp các tam giác có hai cạnh là a và b, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

*Giải*

Ta có công thức $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$. Diện tích S của tam giác lớn nhất khi sinC có giá trị lớn nhất, nghĩa là khi $\widehat{C} = 90^0$.

Vậy tam giác vuông tại C có diện tích lớn nhất.

# CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**1.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào là đúng?

A) $\sin 150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;   B) $\cos 150^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

C) $\tan 150^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;   D) $\cot 150^0 = \sqrt{3}$.

*Trả lời:* $150^0$ là góc tù nên $\sin 150^0 > 0$, $\cos 150^0 < 0$, $\cot 150^0 < 0$

Nên (A), (B), (D) sai.

$$\tan 150^0 = -\tan 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ Chọn (C).

**2.** Cho $\alpha$ và $\beta$ là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A) $\sin\alpha = \sin\beta$;   B) $\cos\alpha = -\cos\beta$;

C) $\tan\alpha = -\tan\beta$;   D) $\cot\alpha = \cot\beta$.

*Trả lời:* Hai góc $\alpha$ và $\beta$ bù nhau có sin bằng nhau, còn cosin, tang và cotang đối nhau. Chọn (D).

**3.** Cho $\alpha$ là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\sin\alpha < 0$;   B) $\cos\alpha > 0$;   C) $\tan\alpha < 0$;   D) $\cot\alpha > 0$.

*Trả lời:* $\alpha$ tù thì $\tan\alpha < 0$. Chọn (C).

**4.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A) $\cos 45^0 = \sin 45^0$;   B) $\cos 45^0 = \sin 135^0$;

C) $\cos 30^0 = \sin 120^0$;   D) $\sin 60^0 = \cos 120^0$.

*Trả lời*

$\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \sin 135^0$

$\cos 30^0 = \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ còn $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$. Chọn (D).

**5.** Cho hai góc nhọn $\alpha$ và $\beta$ trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A) $\cos\alpha < \cos\beta$;   B) $\sin\alpha < \sin\beta$;

C) $\alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta$;   D) $\tan\alpha + \tan\beta > 0$.

*Trả lời:* (B), (C), (D) đúng. $\alpha < \beta \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta$. Chọn (A).

**6.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 30^0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A) $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$;   B) $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$;   C) $\cos C = \frac{1}{2}$;   D) $\sin B = \frac{1}{2}$.

*Trả lời:* $\hat{C} = 60^0$. (B), (C), (D) đúng

$\cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chọn (A).

**7.** Tam giác đều ABC có đường cao AH. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\sin\widehat{BAH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\cos\widehat{BAH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

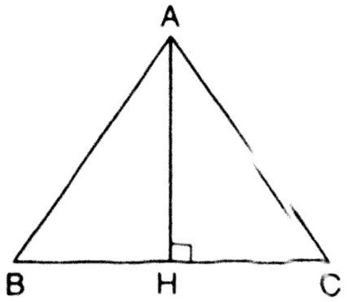
C) $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\sin\widehat{AHC} = \dfrac{1}{2}$.

*Trả lời:* A) $\sin\widehat{BAH} = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$;

B) $\cos\widehat{BAH} = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

C) $\sin\widehat{ABC} = \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

D) $\sin\widehat{AHC} = \sin 90^0 = 1$. Chọn (C).



**8.** Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A) $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$; B) $\cos\alpha = \cos(180^0 - \alpha)$;

C) $\tan\alpha = \tan(180^0 - \alpha)$; D) $\cot\alpha = \cot(180^0 - \alpha)$.

*Giải:*

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau, còn cos, tan và cot đối nhau. Chọn (A).

**9.** Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây:

A) $\cos 35^0 > \cos 10^0$; B) $\sin 60^0 < \sin 80^0$;

C) $\tan 45^0 < \tan 60^0$; D) $\cos 45^0 = \sin 45^0$.

*Trả lời*: Chọn (A), vì:

A) $\cos 35^0 < \cos 10^0$; B) $\sin 60^0 < \sin 80^0$;

C) $\tan 45^0 = 1$, $\tan 60^0 = \sqrt{3}$; D) $\cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**10.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^0$. Hệ thức nào sau đây là sai?

A) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 130^0$; B) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = 40^0$;

C) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = 50^0$; D) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 120^0$.

*Giải:*

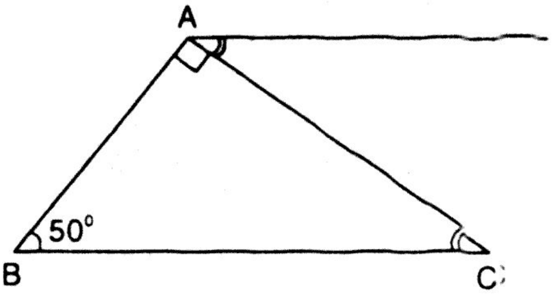
Vì $\hat{B} = 50^0$ nên $\hat{C} = 40^0$

A) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0 + 40^0 = 130^0$

B) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = 40^0$

C) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = 50^0$

D) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 90^0 + 50^0 = 140^0$. Chọn (D).



**11**. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng.

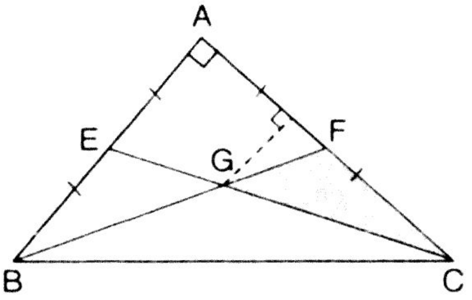
A) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$; B) $\vec{a}.\vec{b} = 0$; C) $\vec{a}.\vec{b} = -1$; D) $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$

***Trả lời:*** Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 0^0 = |\vec{a}||\vec{b}|$. Chọn (A).

**12**. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có AB = AC = 30cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC là:

A) $50cm^2$; B) $50\sqrt{2}\ cm^2$;

C) $75cm^2$; D) $15\sqrt{105}\ cm^2$.



***Trả lời:*** $S_{GFC} = \frac{1}{2}FC.\ \frac{1}{3}AB$

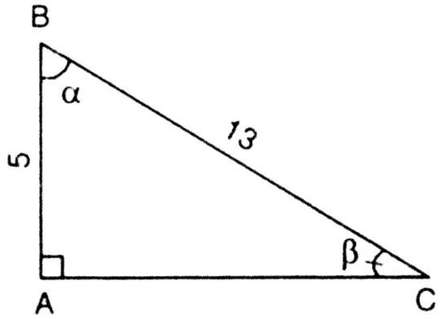
$= \frac{1}{6}.15.30 = 75cm^2$. Chọn (C).

**13**. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 5cm, BC = 13cm.

Gọi góc $\widehat{ABC} = \alpha$ và $\widehat{ACB} = \beta$. Hãy chọn kết luận đúng.

A) $\beta > \alpha$; B) $\beta < \alpha$;

C) $\beta = \alpha$; D) $\alpha \le \beta$.



***Trả lời:*** Ta có: $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2$

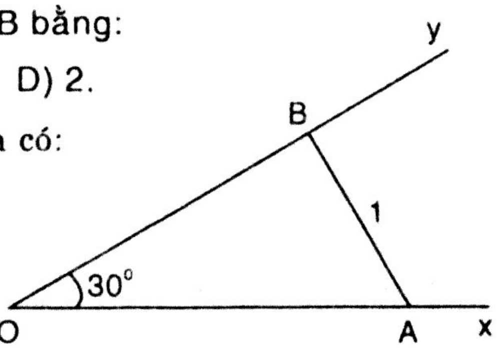
$= 169 - 25 = 144$

Vậy $AC = \sqrt{144} = 12$ (cm)

Vì AC > AB nên $\alpha > \beta$. Chọn (B).

**14**. Cho góc $\widehat{xOy} = 30^0$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho AB = 1. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

A) 1,5 ; B) $\sqrt{3}$ ; C) $2\sqrt{2}$ ; D) 2.



***Giải:*** Xét tam giác OAB. Theo định lí sin ta có:

$$\frac{OB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin 30^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Vậy $OB = 2\sin A \le 2$. Chọn (D).

**15**. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn;

B) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù;

C) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn;

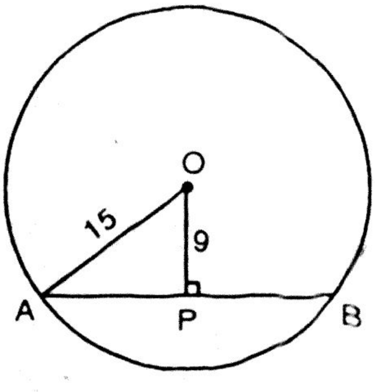
D) Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.

***Trả lời:*** Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Nếu cos A > 0 thì góc A nhọn, hay $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn. Chọn (A).

**16**. Đường tròn tâm O có bán kính R = 15cm. Gọi P là một điểm cách tâm O một khoảng PO = 9cm. Dây cung đi qua P và vuông góc với PO có độ dài là:

A) 22cm ; B) 23cm; C) 24cm; D) 25cm.



*Trả lời:*

Gọi AB là dây cung đi qua P và AB ⊥ OP.

Ta có P là trung điểm của đoạn AB.

Xét tam giác vuông AOP ta có:

$$AP^2 = AO^2 - OP^2 = 15^2 - 9^2 = 144$$

Vậy AP = 12cm và AB = 24cm. Chọn (C).

**17**. Cho tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 18cm và có diện tích bằng 64cm$^2$. Giá trị sinA là:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; B) $\frac{3}{8}$; C) $\frac{4}{5}$; D) $\frac{8}{9}$

*Giải:* Ta có $S = \frac{1}{2}bc.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{2.64}{8.18} = \frac{8}{9}$. Chọn (D).

**18**. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là sai?

A) $\sin\alpha = -\cos\beta$ ; B) $\cos\alpha = \sin\beta$ ;

C) $\tan\alpha = \cot\beta$ ; D) $\cot\alpha = \tan\beta$.

*Trả lời:* (B), (C), (D) đúng. Chọn (A).

**19**. Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A) $\sin 90^0 < \sin 150^0$; B) $\sin 90^0 15' < \sin 90^0 30'$;

C) $\cos 90^0 30' > \cos 100^0$; D) $\cos 150^0 > \cos 120^0$.

*Trả lời:* (A), (B), (D) sai. Chọn (C).

**20**. Cho tam giác ABC vuông tại A. Khẳng định nào sau đây là sai?

A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ; B) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; D) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$.

*Trả lời:* (A), (B), (C) đúng

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB\cos C$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = -BC.BA\cos B < \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$$. Chọn (D).

**21**. Cho tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 7cm, CA = 9cm. Giá trị cosA là:

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $-\frac{2}{3}$; D) $\frac{1}{2}$.

*Trả lời:* a = 7, b = 9, c = 4

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 4^2 - 7^2}{2.9.4} = \frac{2}{3}$$. Chọn (A).

**22.** Cho hai điểm A = (1; 2) và B = (3; 4). Giá trị của $\overrightarrow{AB}^2$ là:

A) 4; B) $4\sqrt{2}$; C) $6\sqrt{2}$; D) 8.

*Giải:*

$\overrightarrow{AB} = (2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Chọn (D).

**23.** Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

A) $90^0$; B) $60^0$; C) $45^0$; D) $30^0$.

*Trả lời:*

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{4.1 + 3.7}{\sqrt{4^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}.\sqrt{50}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $45^0$. Chọn (C).

**24.** Cho hai điểm M = (1; –2) và N = (–3; 4). Khoảng cách giữa hai điểm M và N là:

A) 4; B) 6; C) $3\sqrt{6}$; D) $2\sqrt{13}$.

*Trả lời:*

$MN = \sqrt{(-3-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Chọn (D).

**25.** Cho tam giác ABC có A = (–1; 1); B = (1; 3) và C = (1; –1).

Trong các cách phát biểu sau đây, hãy chọn cách phát biểu đúng.

A) ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau;

B) ABC là tam giác có ba góc đều nhọn;

C) ABC là tam giác cân tại B (có BA = BC);

D) ABC là tam giác vuông cân tại A.

*Trả lời:*

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$; $\overrightarrow{BC} = (0; -4)$

Nên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8}$ và $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 4$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2.2 + 2(-2) = 0 \Rightarrow AB \perp AC$

Vậy ΔABC vuông cân tại A. Chọn (D).

**26.** Cho tam giác ABC có A = (10; 5); B = (3; 2) và C = (6; –5). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A) ABC là tam giác đều;

B) ABC là tam giác vuông cân tại B;

C) ABC là tam giác vuông cân tại A;

D) ABC là tam giác có góc tù tại A.

*Trả lời:*

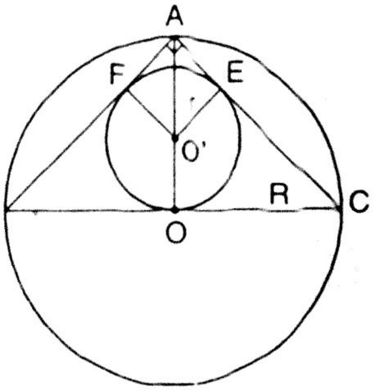
Ta có $\overrightarrow{BA} = (7; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (3; -7)$; $\overrightarrow{AC} = (-4; -10)$.

Do đó: $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{58}$

Mặt khác: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 21 - 21 = 0$. Ta suy ra $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$.

Vậy tam giác vuông cân tại B. Chọn (B).

**27.** Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:



A) $1 + \sqrt{2}$;
B) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$;

C) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$;
D) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

***Trả lời:***

Ta có BC = 2R và OA = R

Đường tròn nội tiếp tâm O' tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại O, E, F.

Tứ giác O'EAF là hình vuông nên $O'A = O'E\sqrt{2} = r\sqrt{2}$

Do đó $OA = r + r\sqrt{2} = R$

Vậy $r(1 + \sqrt{2}) = R \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{r\left(1 + \sqrt{2}\right)}{r} = 1 + \sqrt{2}$. Chọn (A).

**28.** Tam giác ABC có AB = 9cm; AC = 12cm và BC = 15cm. Khi đó trung tuyến AM của tam giác có độ dài là:

A) 8cm ;
B) 10cm ;
C) 9cm ;
D) 7,5cm.

***Trả lời:***

Vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên ta có tam giác ABC vuông tại A.

Do đó trung tuyến: $AM = \frac{BC}{2} = 7,5$ (cm). Chọn (D).

**29.** Tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh CA lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A) 2S;
B) 3S;
C) 4S;
D) 6S.

***Trả lời:***

Ta có công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$

Gọi S' là diện tích tam giác mới, ta có:

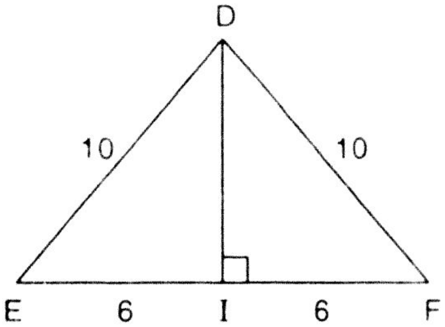
$$S' = \frac{1}{2}2a.3b.\sin C = 6S_{ABC}.$$ Chọn (D).

**30.** Cho tam giác DEF có DE = DF = 10cm và EF = 12cm.

Gọi I là trung điểm của cạnh EF. Đoạn thẳng DI có độ dài là:

A) 6,5cm; B) 7cm;

C) 8cm; D) 4cm.



*Trả lời*:

$$DI = \sqrt{DE^2 - EI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Chọn (C).

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM = 6, CN = 9 và $\widehat{BGC} = 120^0$, với G là trọng tâm $\Delta ABC$.

Tính các cạnh của $\Delta ABC$.

**2.** Cho $\Delta ABC$, $l_a$ là phân giác trong góc A.

Chứng minh rằng: $l_a = \frac{2}{b+c}.\sqrt{bcp(p-a)}$

**3.** Cho $\Delta ABC$ có diện tích S.

a) Chứng minh rằng:

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

b) Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16.S^2$

**4.** Cho $\Delta ABC$ có các trung tuyến $m_b$, $m_c$ thỏa $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$

Chứng minh rằng:

a) $b^2 + c^2 = 2a^2$;

b) 2cotA = cotB + cotC

*Chương III.*

# PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

## §1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

**1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng**

*Định nghĩa:* Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng $\Delta$.

**2. Phương trình tham số của đường thẳng**

*Định nghĩa:* Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u}(u_1; u_2)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Nếu $u_1 \neq 0$ thì $k = \dfrac{u_2}{u_1}$ là hệ số góc của $\Delta$.

**3. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng**

*Định nghĩa:* Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của $\Delta$.

**4. Phương trình tổng quát của đường thẳng**

*Định nghĩa:* Phương trình $ax + by + c = 0$ với a và b không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

*Nhận xét:* Nếu đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $ax + by + c = 0$ thì $\Delta$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$ và vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-b; a)$.

**5. Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn**

Đường thẳng $\Delta$ cắt Ox và Oy lần lượt tại M(a, 0) và N(0; b) (với $a \neq 0, b \neq 0$) có phương trình là: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

**6. Vị trí tương đối của hai đường thẳng**

Cho $\Delta_1$: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$\Delta_2$: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\Delta_1, \Delta_2 \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Trường hợp $a_2, b_2, c_2$ đều khác 0, thì: $\Delta_1, \Delta_2$ cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

$$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

### 7 Góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b, hay góc giữa a và b.

Khi a song song hoặc trùng với b ta quy ước góc giữa chúng bằng $0^0$

Cho $\Delta_1$: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $\Delta_2$: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\alpha$ là góc giữa $\Delta_1$ và $\Delta_2$ thì $\cos\alpha = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \left|\cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right)\right|$

Đặc biệt: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Nếu $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$

thì $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

### 8 Công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$. Khoảng cách từ điểm $M_0$ đến đường thẳng $\Delta$, kí hiệu là $d(M_0,\Delta)$, được tính bởi công thức:

$$d(M_0,\Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1 Lập phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M(2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4)$;

b) d đi qua điểm M(−2; 3) và vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; 1)$.

*Giải*

a) Ta có: M(2; 1) và $\vec{u} = (3; 4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

b) M(–2; 3); vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; 1)$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -5)$

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

**2.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua M(–5; –8) và có hệ số góc k = –3;

b) Δ đi qua hai điểm A(2; 1) và B(–4; 5).

*Giải*

a) Phương trình đường thẳng Δ đi qua M(–5; –8) có hệ số góc k = –3 là:

$$y - y_M = k(x - x_M) \Leftrightarrow y + 8 = -3(x + 5) \Leftrightarrow 3x + y + 23 = 0$$

b) Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-6; 4)$

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A và B là: $\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Khử t ta được: $\dfrac{x - 2}{-6} = \dfrac{y - 1}{4} \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

**3.** Cho tam giác ABC, biết A(1; 4), B(3; –1) và C(6; 2).

a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AB, BC và CA;

b) Lập phương trình tổng quát của đường cao AH và trung tuyến AM.

*Giải*

a) Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 4}{-1 - 4}$$

$$\Leftrightarrow -5x + 5 = 2y - 8 \Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$$

Tương tự BC: $x - y - 4 = 0$

CA: $2x + 5y - 22 = 0$

b) Đường cao AH đi qua A(1; 4) vuông góc với BC nên AH: $x + y + c = 0$

AH qua A(1; 4) nên $1 + 4 + C = 0 \Rightarrow C = -5$.

Vậy phương trình đường cao AH: $x + y - 5 = 0$.

M là trung điểm của BC thì $M\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

Phương trình trung tuyến AM:

$$\frac{x - x_M}{x_A - x_M} = \frac{y - y_M}{y_A - y_M} \Leftrightarrow \frac{x - \frac{9}{2}}{1 - \frac{9}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{4 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$$

**4** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm M(4; 0) và điểm N(0; −1).

### *Giải*

Áp dụng phương trình đoạn chắn.

Phương trình đường thẳng qua hai điểm M(4; 0) và N(0; −1) là

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} = 1 \Leftrightarrow -x + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 4 = 0$$

**5** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng $d_1$ và $d_2$ sau đây:

a) $d_1$: $4x - 10y + 1 = 0$ và $d_2$: $x + y + 2 = 0$;

b) $d_1$: $12x - 6y + 10 = 0$ và $d_2$: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

c) $d_1$: $8x + 10y - 12 = 0$ và $d_2$: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

### *Giải*

a) Ta có $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}$ nên $d_1$ và $d_2$ cắt nhau.

b) Phương trình tổng quát của $d_2$ là: $d_2 : 2x - y - 7 = 0$.

Ta có $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1} \neq \frac{10}{-7}$ nên $d_1 \,//\, d_2$.

c) Phương trình tổng quát của $d_2$ là: $d_2$: $4x + 5y - 6 = 0$.

Ta có $\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{-12}{-6}$ nên $d_1 \equiv d_2$.

**6** Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

Tìm điểm M thuộc d và cách điểm A(0; 1) một khoảng bằng 5.

### *Giải*

Ta có $M(2 + 2t; 3 + t) \in d$ và $AM = 5$

$$AM = 5 \Leftrightarrow AM^2 = 25 \Leftrightarrow (2 + 2t)^2 + (2 + t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{17}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thoả mãn đề bài là: $M_1(4; 4)$; $M_2\left(-\frac{24}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

**7.** Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ lần lượt có phương trình

$$d_1: 4x - 2y + 6 = 0 \text{ và } d_2: x - 3y + 1 = 0.$$

*Giải*

Ta có $d_1$: $4x - 2y + 6 = 0$

$d_2$: $x - 3y + 1 = 0$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa $d_1$ và $d_2$ có:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|4 + 6|}{\sqrt{16 + 4}.\sqrt{1 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{20}.\sqrt{10}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy: $\varphi = 45^0$.

**8.** Tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $A(3; 5)$, $\Delta$: $4x + 3y + 1 = 0$;

b) $B(1; -2)$, $d$: $3x - 4y - 26 = 0$;

c) $C(1; 2)$, $m$: $3x + 4y - 11 = 0$

*Giải*

a) Ta có $A(3; 5)$

$\Delta$: $4x + 3y + 1 = 0$

$$d(A, \Delta) = \frac{|4(3) + 3(5) + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{28}{5}$$

b) Ta có $B(1; -2)$

$d$: $3x - 4y - 26 = 0$

$$d(B, d) = \frac{|3(1) - 4(-2) - 26|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

c) Ta có $C(1; 2)$

$m$: $3x + 4y - 11 = 0$

$$d(C, m) = \frac{|3(1) + 4(2) - 11|}{\sqrt{9 + 16}} = 0.$$ Vậy $C \in m$.

**9.** Tìm bán kính của đường tròn tâm $C(-2; -2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta$:

$$5x + 12y - 10 = 0$$

*Giải*

Bán kính đường tròn là khoảng cách từ C đến $\Delta$.

$$R = d(C, \Delta) = \frac{|5(-2) + 12(-2) - 10|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{44}{13}.$$

Vậy $R = \frac{44}{13}$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $6x - 3y + 2 = 0$. Các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là $4x - 3y + 1 = 0,7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình tổng quát hai cạnh AC, BC và đường cao qua C.

*Hướng dẫn*

Gọi H là trực tâm tam giác ABC: $\{A\} = AB \cap AH \Rightarrow A(-1; -1)$

$\{B\} = AB \cap HB \Rightarrow B(2; 4)$

AC: $2x - 7y - 5 = 0$; BC: $3x + 4y - 22 = 0$; CH: $3x + 5y - 23 = 0$

2. Viết phương trình tổng quát các cạnh của tam giác ABC nếu cho $B(-4; -5)$ và hai đường cao có phương trình là:

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ và } 3x + 8y + 13 = 0$$

*Hướng dẫn*

Giả sử hai đường cao AH: $3x + 8y + 13 = 0$; CK: $5x + 3y - 4 = 0$

AB qua A và vuông góc với CK nên AB: $3x - 5y - 13 = 0$

BC qua B và vuông góc với AH nên BC: $8x - 3y + 17 = 0$

AC: $5x + 2y - 1 = 0$

3. Cho ba trung điểm của ba cạnh của tam giác là: $M_1\ (2\ ;\ 1)$, $M_2(5\ ;\ 3)$, $M_3(3; -4)$. Viết phương trình tổng quát các cạnh của tam giác.

4. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây, nếu chúng cắt nhau thì tìm tọa độ giao điểm.

a) $2x + 3y + 1 = 0$ và $4x + 5y - 6 = 0$

b) $4x - y + 2 = 0$ và $-8x + 2y + 1 = 0$

c) $3x - 2y + 1 = 0$ và $-6x + 4y - 2 = 0$

5. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu cho $A(1; 3)$ và hai đường trung tuyến có phương trình là: $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

6. Cho tam giác ABC, có trung điểm một cạnh là $M(-1; 1)$ còn hai cạnh kia có phương trình là $x + y - 2 = 0$ và $2x + 6y + 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

*Hướng dẫn*

Giả sử M là trung điểm BC, hai cạnh có phương trình đã cho là AB, AC. Xác định được A, các trung điểm P, Q của các cạnh AB và AC.

7. Cho hình vuông đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo đặt trên đường thẳng $7x - y + 8 = 0$. Viết phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

*Hướng dẫn*

Đường chéo AC: $x + 7y - 31 = 0$

Đường thẳng AB hợp với đường chéo AC một góc $45^0$.

**8.** Cho hai điểm $P(2; 5)$ và $Q(5; 1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P sao cho khoảng cách từ Q đến đường thẳng đó bằng 3.

***Đáp số:*** $7x + 24y - 134 = 0$

**9.** Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, hai đỉnh $A(3; -3)$, $B(3; -2)$ và trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C

**10.** Cho ba đường thẳng $d_1$: $3x + 4y - 6 = 0$; $d_2$: $4x + 3y - 1 = 0$; $d_3$: $y = 0$. Gọi A là giao điểm của $d_1$ và $d_2$, $\{B\} = d_2 \cap d_3$; $\{C\} = d_1 \cap d_2$

a) Viết phương trình phân giác trong của góc A và tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.

**11.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(2; 1)$ sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng $d_1$: $2x - y + 5 = 0$ và $d_2$: $3x + 6y - 1 = 0$ tạo thành một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của $d_1$ và $d_2$.

***Đáp số:*** $3x + y - 5 = 0$; $x - 3y - 5 = 0$.

# §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. Phương trình đường tròn có tâm và bán kính cho trước

Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Phương trình đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ có thể được viết dưới dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn (C) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$. Khi đó đường tròn (C) có tâm $I(a, b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

### 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và $M_0(x_0; y_0) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_0$ là:

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;

b) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

***Giải***

Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a, b)$ bán kính $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$).

a) Ta có $a = 1, b = 1, c = -2$

Đường tròn có tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2} = 2$

b) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$

Ta có $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$; $c = -\frac{11}{16}$

Đường tròn có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{11}{16}} = 1$

c) $a = 2, b = -3, c = -3$.

Đường tròn có tâm $I(2; -3)$ bán kính $R = \sqrt{4 + 9 + 3} = 4$.

2. Lập phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ trong các trường hợp sau:

a) $(\mathcal{C})$ có tâm $I(-2; 3)$ và đi qua $M(2; -3)$;

b) $(\mathcal{C})$ có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x - 2y + 7 = 0$;

c) $(\mathcal{C})$ có đường kính AB với $A(1; 1)$ và $B(7; 5)$.

***Giải***

a) $(\mathcal{C})$ có tâm $I(-2; 3)$ và đi qua $M(2; -3)$ nên $(\mathcal{C})$ có bán kính $R = IM = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$. Vậy phương trình của $(\mathcal{C})$ là:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$$

b) Ta có $I(-1; 2)$

$d: x - 2y + 7 = 0$

$(\mathcal{C})$ có tâm I và tiếp xúc với (d) suy ra $(\mathcal{C})$ có bán kính R bằng khoảng cách từ I tới d: $R = \frac{|-1 - 4 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Phương trình của $(\mathcal{C})$ là: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}$.

c) Ta có $A(1; 1)$; $B(7; 5)$

Tâm I của $(\mathcal{C})$ là trung điểm của AB nên suy ra I có tọa độ $(4; 3)$. Gọi R là bán kính của $(\mathcal{C})$, ta có: $R^2 = IA^2 = 9 + 4 = 13$.

Vậy phương trình của $(\mathcal{C})$ là: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

3. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm

a) $A(1; 2)$, $B(5; 2)$, $C(1; -3)$;  b) $M(-2; 4)$, $N(5; 5)$, $P(6; -2)$.

***Giải***

a) Phương trình của đường tròn $(\mathcal{C})$ có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (1)$$

Thay tọa độ của các điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + 4 - 2a - 4b + c = 0 \\ 25 + 4 - 10a - 4b + c = 0 \\ 1 + 9 - 2a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b + c = -5 \\ -10a - 4b + c = -29 \\ -2a + 6b + c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $(\mathscr{C})$ có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$

b) Tương tự như câu a) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a - 8b + c = -20 \\ -10a - 10b + c = -50 \\ -12a + 4b + c = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy $(\mathscr{C})$ có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

**4.** Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy và đi qua điểm M(2; 1).

*Giải*

Xét đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Có tâm I(a, b).

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox và Oy, nên: $|a| = |b| = R$ (vì d(I, Ox) = d(I, Oy))

- *Trường hợp 1:* $b = a$

  $(\mathscr{C})$: $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

  $M(2; 1) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right.$

- *Trường hợp 2:* $b = -a$

  $(\mathscr{C})$: $(x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$

  $M(2; 1) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (2 - a)^2 + (1 + a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$

  Phương trình vô nghiệm.

  Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài:

  $$(\mathscr{C}_1): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

  $$(\mathscr{C}_2): (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

**5.** Lập phương trình của đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng $4x - 2y - 8 = 0$.

*Giải*

Đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ có tâm nằm trên đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$.

- Trường hợp tâm I thuộc đường thẳng $y = x$.

  Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x - 2y - 8 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy I(4, 4)

Bán kính R = d(I, Ox) = 4

Vậy $(\mathscr{C}_1)$: $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

- Trường hợp tâm I thuộc đường thẳng $y=-x$.

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x-2y-8=0\\ y=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\ y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

Vậy $I\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$

Bán kính $R=d(I,Ox)=\frac{4}{3}$

Vậy $(\mathscr{C}_2)$: $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình: $x^2+y^2-4x+8y-5=0$

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của $(\mathscr{C})$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ đi qua điểm A(–1; 0).

c) Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ vuông góc với đường thẳng:

$$3x-4y+5=0.$$

### *Giải*

$(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-4x+8y-5=0$

a) Ta có a = 2, b = –4; c = –5

$(\mathscr{C})$ có tâm I(2; –4) và có bán kính: $R=\sqrt{4+16+5}=5$

$(\mathscr{C})$: $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

b) Ta có $A(-1;0)\in(\mathscr{C})$. Phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại A là:

$$(-1-2)(x+1)+(0+4)(y-0)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+4y-3=0 \Leftrightarrow 3x-4y+3=0$$

c) Tiếp tuyến $\Delta$ vuông góc với đường thẳng d: $3x-4y+5=0$ nên phương trình $\Delta$ có dạng: $4x+3y+c=0$. Ta có

$\Delta$ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ nên $d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|8-12+c|}{5}=5 \Leftrightarrow |c-4|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c-4=25\\ c-4=-25\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=29\\ c=-21\end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ vuông góc với d, đó là:

$$\Delta_1: 4x+3y+29=0$$

$$\Delta_2: 4x+3y-21=0.$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình đường tròn qua điểm A(1; –2) và các giao điểm của đường thẳng: $x - 7y + 10 = 0$ với đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
2. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$$

$$(\mathscr{C}'): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

3. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 1 = 0$ và $(C_m)$: $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$
   a) Xác định m để $(C_m)$ là đường tròn.
   b) Chứng minh rằng có hai đường tròn $(C_m)$ tiếp xúc với (C) ứng với hai giá trị khác nhau của m. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường đó.
4. Cho $(C_m)$: $x^2 + y^2 + (2 - m)x + 2my - 1 = 0$
   a) Xác định m để $(C_m)$ là đường tròn.
   b) Cho m = –2 và A(0; –1). Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn $(C_{-2})$ kẻ từ A.

# §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

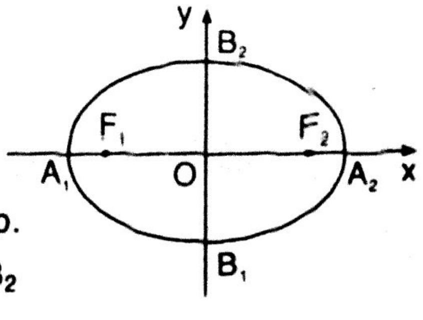
## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. Định nghĩa đường elip

Cho hai điểm cố định $F_1, F_2$ và một độ dài không đổi 2a lớn hơn $F_1F_2$. Elip là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

Các điểm $F_1$ và $F_2$ gọi là các tiêu điểm của elip. Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

### 2. Phương trình chính tắc của elip



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$

trong đó $b^2 = a^2 - c^2$; $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$

Các điểm $A_1$, $A_2$, $B_1$ và $B_2$ gọi là các đỉnh của elip.

Đoạn thẳng $A_1A_2$ gọi là trục lớn, đoạn thẳng $B_1B_2$ gọi là trục nhỏ của elip.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh của các elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $4x^2 + 9y^2 = 1$; c) $4x^2 + 9y^2 = 36$.

*Giải*

a) (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có $a = 5$, $b = 3$, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Vậy (E) có trục lớn $2a = 10$, trục nhỏ $2b = 6$, tiêu điểm: $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, các đỉnh: $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

b) (E): $4x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

Ta có $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Vậy (E) có trục lớn $2a = 1$, trục nhỏ $2b = \frac{2}{3}$, tiêu điểm: $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{6};0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{6};0\right)$, các đỉnh: $A_1\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $A_2\left(\frac{1}{2};0\right)$, $B_1\left(0;-\frac{1}{3}\right)$, $B_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

c) (E) $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Ta có $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$.

Vậy (E) có trục lớn $2a = 6$, trục nhỏ $2b = 4$, tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$, các đỉnh: $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$.

Lập phương trình chính tắc của elip, biết:

a) Độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 8 và 6;

b) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6.

*Giải*

a) Ta có: $\begin{cases}2a = 8\\2b = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 4\\b = 3\end{cases}$

Phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

b) Ta có: $\begin{cases}2a = 10\\2c = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 5\\c = 3\end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 25 - 9 = 16$

Vậy (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a) Elip đi qua các điểm $M(0; 3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$;

b) Elip có một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và điểm $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nằm trên elip.

*Giải*

a) Giả sử: (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$M(0; 3) \in (E) \Leftrightarrow \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b = 3$

$N\left(3; -\frac{12}{5}\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25.b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$

Vậy (E) có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\,; 0)$, suy ra $c = \sqrt{3}$.

Vậy ta có: $a^2 = b^2 + 3$. (1)

Thay tọa độ của điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ vào phương trình elip ta được:

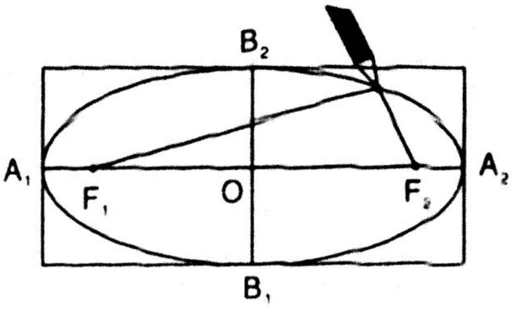
$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1. \ (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta có: $b^2 = 1$, $a^2 = 4$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

**4. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 80cm và trục nhỏ là 40cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80cm × 40cm, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván như hình vẽ. Hỏi phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?**

*Giải*



(E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $2a = 80$, $2b = 40$

Suy ra $a = 40$, $b = 20$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 1600 - 400 = 1200$

$\Rightarrow c = 20\sqrt{3}$

Ta phải ghim hai cái đinh tại hai tiêu điểm $F_1$ và $F_2$, nghĩa là cách mép tấm ván ép một đoạn:

$$A_1F_1 = a - c = 40 - 20\sqrt{3} = 20(2 - \sqrt{3}) \approx 5{,}36 \text{ (cm)}$$

Theo cách vẽ trong bài học vòng dây phải có chiều dài:

$$2a + 2c = 80 + 40\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

5. Cho hai đường tròn $\mathcal{C}_1$ ($F_1$; $R_1$) và $\mathcal{C}_2$ ($F_2$; $R_2$). $\mathcal{C}_1$ nằm trong $\mathcal{C}_2$ và $F_1 \neq F_2$. Đường tròn $\mathcal{C}$ thay đổi luôn tiếp xúc ngoài với $\mathcal{C}_1$ và tiếp xúc trong với $\mathcal{C}_2$. Hãy chứng tỏ rằng tâm M của đường tròn $\mathcal{C}$ di động trên một elip.

*Giải*

Ta gọi bán kính của ($\mathcal{C}$) là R: Ta có $\begin{cases} MF_1 = R + R_1 \\ MF_2 = R_2 - R \end{cases}$

Suy ra $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) có các tiêu điểm là $F_1$, $F_2$ và trục lớn $2a = R_1 + R_2$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 6, tiêu cự bằng 4.

b) (E) có một tiêu điểm F($-2$; 0) và độ dài trục lớn bằng 10.

c) (E) đi qua M (0; 1) và N$\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Xác định tọa độ các đỉnh, tiêu điểm và tâm sai của các elip sau:

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$ ; b) $x^2 + 9y^2 = 36$

3. Cho A(0; sint), B(3cost; 0). Tìm tập hợp các điểm M(x; y) sao cho $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

4. Cho hai elip có phương trình: $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ và $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

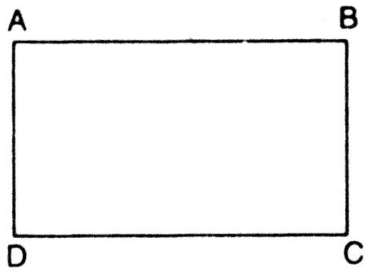
Chứng minh rằng: hai elip này cắt nhau tại 4 điểm nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip.

***Đáp số:*** $x^2 + y^2 = \frac{90}{11}$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Cho hình chữ nhật ABCD. Biết các đỉnh A(5; 1), C(0; 6) và phương trình CD: $x + 2y - 12 = 0$. Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh còn lại.

*Giải*



CD: $x + 2y - 12 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$

Vì AB // CD nên AB đi qua A có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$, do đó AB có phương trình là:

$1.(x - 5) + 2.(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

- $AD \perp AB$ nên AD đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{m} = (2; -1)$ (vì $\overrightarrow{m} \perp \overrightarrow{n}$)

  Vậy AD có phương trình là: $2(x - 5) - 1.(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 9 = 0$
- BC // AD nên BC đi qua C có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{m} = (2; -1)$ nên BC có phương trình: $2.(x - 0) - 1.(y - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 6 = 0$.

**2.** Cho A(1; 2), B(– 3; 1) và C(4; – 2). Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

***Giải***

Với điểm M(x; y), ta có: $MA^2 + MB^2 = MC^2$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 4)^2 + (y + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 66.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I (–6; 5) bán kính $R = \sqrt{66}$.

**3.** Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng:

$$\Delta_1: 5x + 3y - 3 = 0 \text{ và } \Delta_2: 5x + 3y + 7 = 0$$

***Giải***

Ta có: M(x; y) cách đều $\Delta_1$ và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|5x + 3y - 3|}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{|5x + 3y + 7|}{\sqrt{25 + 9}} \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0$$

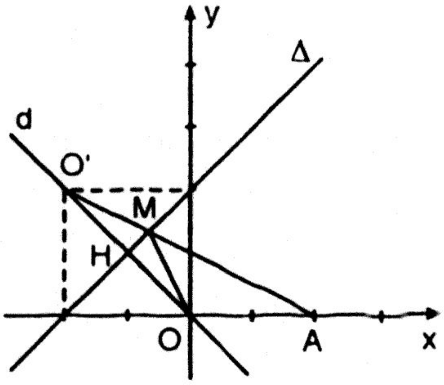
Vậy tập hợp các điểm M cách đều hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là đường thẳng Δ có phương trình: $5x + 3y + 2 = 0$.

**4.** Cho đường thẳng Δ: $x - y + 2 = 0$ và hai điểm O(0; 0), A(2; 0).

a) Tìm điểm đối xứng của O qua Δ;

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

***Giải***



a) Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O vuông góc với Δ có phương trình:

$$x + y = 0$$

Tọa độ giao điểm H của d và Δ là nghiệm hệ: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy H(–1; 1).

O' là điểm đối xứng với O qua Δ ⇔ H là trung điểm của OO'.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{O + x_{O'}}{2} \\ 1 = \dfrac{O + y_{O'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O'} = -2 \\ y_{O'} = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } O'(-2; 2)$$

b) Ta có: OM + MA ngắn nhất $\Leftrightarrow$ O'M + MA ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ O', M, A thẳng hàng $\Leftrightarrow M \equiv M_0$

với $M_0$ là giao điểm của O'A và $\Delta$.

Phương trình đường thẳng O'A là:

$$\frac{x - x_{0'}}{x_A - x_{0'}} = \frac{y - y_{0'}}{y_A - y_{0'}} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2+2} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Tọa độ của $M_0$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Vậy $M_0\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

5. Cho ba điểm A(4; 3), B(2; 7) và C(–3; –8).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác ABC;

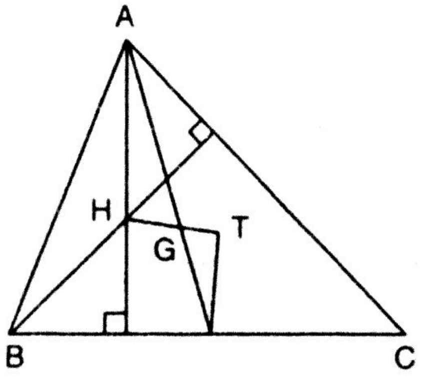
b) Gọi T là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh T, G và H thẳng hàng;

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

*Giải*

a) Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$



Vậy $G\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

Gọi $H(x_H; y_H)$ là trực tâm tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x_H - 4; y_H - 3)$

$\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H - 2; y_H - 7)$

$\overrightarrow{AC} = (-7; -11)$

H là trực tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5(x_H - 4) - 15(y_H - 3) = 0 \\ -7(x_H - 2) - 11(y_H - 7) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 3y_H = 13 \\ 7x_H + 11y_H = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 13 \\ y_H = 0 \end{cases}$$. Vậy H(13; 0).

b) Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp tam giác ABC có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Ta có: A, B, C $\in (\mathscr{C})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 9 - 8a - 6b + c = 0 \\ 4 + 49 - 4a - 14b + c = 0 \\ 9 + 64 + 6a + 16b + c = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 6b + c = -25 \\ -4a - 14b + c = -53 \\ 6a + 16b + c = -73 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 1 \\ c = -59 \end{cases}$$

Vậy ta được tọa độ tâm T của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là T(−5; 1).

Ta có: $\overrightarrow{TH} = (18; -1)$

$$\overrightarrow{TG} = \left(6; -\frac{1}{3}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{TH} = 3\overrightarrow{TG}$ nên T, G, H thẳng hàng.

c) Theo câu b) ta có phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y - 59 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 85$$

**6.** Lập phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng:

$$3x - 4y + 12 = 0 \text{ và } 12x + 5y - 7 = 0.$$

### *Giải*

Gọi $\Delta_1$: $3x - 4y + 12 = 0$

$\Delta_2$: $12x + 5y - 7 = 0$

Điểm M(x; y) thuộc phân giác của các góc tạo bởi $\Delta_1$ và $\Delta_2$ khi và chỉ khi

$$d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$\Leftrightarrow 13|3x - 4y + 12| = 5|12x + 5y - 7|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 21x + 77y - 191 = 0 \\ 99x - 27y + 121 = 0 \end{array}\right.$$

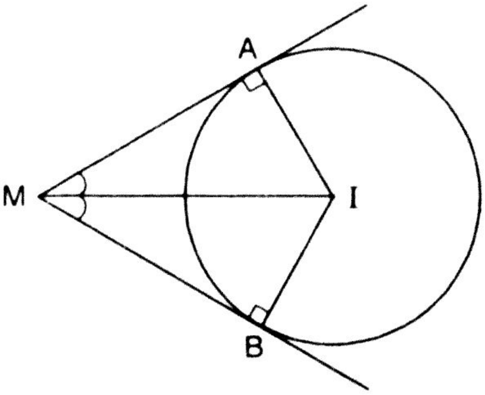
Vậy hai đường phân giác của các góc tạo bởi $\Delta_1$ và $\Delta_2$ có phương trình là:

d: $21x + 77y - 191 = 0$

d': $99x - 27y + 121 = 0$

**7.** Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I(1; 2) và bán kính bằng 3. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M mà từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tạo với nhau một góc 60° là một đường tròn. Hãy viết phương trình đường tròn đó.

*Giải*



Trong tam giác vuông AMI, ta có:

$$\sin\widehat{AMI} = \frac{AI}{MI}$$

$$\Rightarrow \quad MI = \frac{AI}{\sin 30^0} = 2R = 6$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I(1; 2), bán kính IM = 6 và có phương trình: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 36$.

8. Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ trong các trường hợp sau:

a) $\Delta_1$: $2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2$: $5x - 2y + 3 = 0$;

b) $\Delta_1$: $y = -2x + 4$ và $\Delta_2$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

*Giải*

a) Ta có $\overrightarrow{n_1} = (2; 1)$; $\overrightarrow{n_2} = (5; -2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của $\Delta_1$; $\Delta_2$.

Ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{|2.5 - 1.2|}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{5^2+2^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{145}}$

$\Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) \approx 48^0 21'59''$

b) $\Delta_1$ có hệ số góc là $k_1 = -2$

$\Delta_2$ có hệ số góc là $k_2 = \frac{1}{2}$

Ta có $k_1.k_2 = -1$ nên $\Delta_1 \perp \Delta_2$. Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 90^0$.

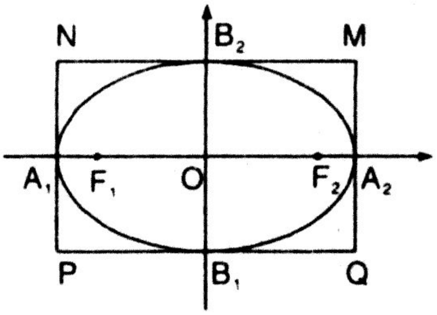
9. Cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Tìm tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm và vẽ elip đó.

*Giải*

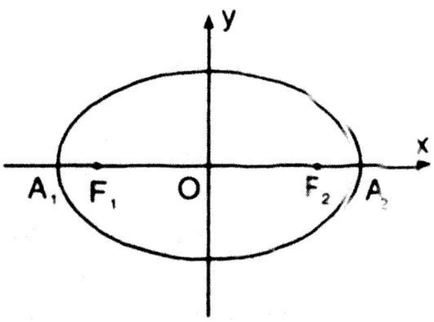
Ta có $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$

(E) có tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{7}; 0)$, $F_2(\sqrt{7}; 0)$ và có các đỉnh $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.



10. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 769 266 km và 768 106 km. Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng, biết rằng các khoảng cách đó đạt được khi Trái Đất và Mặt Trăng nằm trên trục lớn của elip.

*Giải*



Ta có: $\begin{cases} 2a = 769\ 266 \text{ km} \\ 2b = 768\ 106 \text{ km} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 384\ 633 \\ b = 384\ 053 \end{cases}$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 21116$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ tâm Trái Đất đến tâm Mặt Trăng là:

$A_1F_1 = a - c = 363\ 517$ (km)

Khoảng cách dài nhất từ tâm Trái Đất đến tâm Mặt Trăng là:

$F_1A_2 = a + c = 405\ 749$ (km).

# CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là A(1; 2), B(3; 1) và C(5; 4). Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ A?

A) $2x + 3y - 8 = 0$;
B) $3x - 2y - 5 = 0$;
C) $5x - 6y + 7 = 0$;
D) $3x - 2y + 5 = 0$.

*Trả lời:*

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; 3)$

Đường cao AH đi qua A(1; 2) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2; 3)$

Phương trình đường cao AH là:

$$2(x - 1) + 3(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

Chọn (A).

2. Cho tam giác ABC với các đỉnh là A(−1; 1), B(4; 7) và C(3; −2), M là trung điểm của AB. Phương trình tham số của trung tuyến CM là:

A) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$;
B) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$;
C) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$;
D) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t. \end{cases}$

*Trả lời:*

Ta có: $M = \left(\frac{3}{2}; 4\right)$ và $\overrightarrow{CM} = \left(-\frac{3}{2}; 6\right)$

Đường thẳng CM có vectơ chỉ phương $\vec{u} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = (1; -4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng CM là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$. Chọn (B)

3. Cho phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t \end{cases}$.

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của (d) ?

A) $2x + y - 1 = 0$; B) $2x + 3y + 1 = 0$;

C) $x + 2y + 2 = 0$; D) $x + 2y - 2 = 0$.

*Giải:*

Khử t ta được $2x + y = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$. Chọn (A).

4. Đường thẳng đi qua điểm M(1; 0) và song song với đường thẳng d: $4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là:

A) $4x + 2y + 3 = 0$; B) $2x + y + 4 = 0$;

C) $2x + y - 2 = 0$; D) $x - 2y + 3 = 0$.

*Trả lời:*

Đường thẳng đi qua M(1; 0) song song với d: $4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình: $4(x - 1) + 2(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$. Chọn (C).

5. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát: $3x + 5y + 2006 = 0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A) (d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$;

B) (d) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (5; -3)$;

C) (d) có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$;

D) (d) song song với đường thẳng $3x + 5y = 0$.

*Giải:*

Ta có $3x + 5y + 2006 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{2006}{5}$

(d) có hệ số góc $k = -\frac{3}{5}$. Chọn (C).

6. Bán kính của đường tròn tâm I(0; −2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta$: $3x - 4y - 23 = 0$ là:

A) 15; B) 5; C) $\frac{3}{5}$; D) 3.

*Trả lời:* $R = d(I, \Delta) = \frac{|3.0 - 4.(-2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$. Chọn (D).

7. Cho hai đường thẳng: $d_1$: $2x + y + 4 - m = 0$

và $d_2$: $(m + 3)x + y - 2m - 1 = 0$

$d_1$ song song với $d_2$ khi:

A) $m = 1$; B) $m = -1$; C) $m = 2$; D) $m = 3$.

*Trả lời:* $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \frac{m+3}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-2m-1}{4-m} \Leftrightarrow m = -1$. Chọn (B).

**8.** Cho $(d_1)$: $x + 2y + 4 = 0$ và $(d_2)$: $2x - y + 6 = 0$. Số đo của góc giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là:

A) $30^0$; B) $60^0$; C) $45^0$; D) $90^0$.

*Trả lời:* $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 1.2 + 2.(-1) = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$. Chọn (D).

**9.** Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + y + 5 = 0$ và $\Delta_2: y = -10$. Góc giữa $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là:

A) $45^0$; B) $30^0$; C) $88^0 57'52''$; D) $1^0 13'8''$.

*Trả lời:* $\overrightarrow{n_1} = (1; 1)$; $\overrightarrow{n_2} = (0; 1)$

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 45^0. \text{ Chọn (A).}$$

**10.** Khoảng cách từ điểm M(0; 3) đến đường thẳng:

$$\Delta:\ x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2 - \sin\alpha) = 0 \text{ là:}$$

A) $\sqrt{6}$; B) 6; C) $3\sin\alpha$; D) $\frac{3}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

*Trả lời:* $d(M, \Delta) = \frac{|0.\cos\alpha + 3\sin\alpha + 3(2 - \sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = 6$. Chọn (B).

**11.** Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A) $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$; B) $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$;

C) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$; D) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

*Trả lời:*

Phương trình đường tròn có dạng:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$. Chọn (D).

**12.** Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$.

Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A) (C) có tâm I(1; 2); B) (C) có bán kính R = 5;

C) (C) đi qua điểm M(2; 2); D) (C) không đi qua điểm A(1; 1).

*Trả lời:*

Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ có tâm I(–1; –2), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{1 + 4 + 20} = 5$. Chọn (A).

**13.** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M(3; 4) với đường tròn:

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \text{ là:}$$

A) $x + y - 7 = 0$; B) $x + y + 7 = 0$;

C) $x - y - 7 = 0$; D) $x + y - 3 = 0$.

*Trả lời:*

(C) có tâm $I(1; 2)$. Tiếp tuyến tại điểm $M(3; 4)$ của (C) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{MI} = (2; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại M là:

$2(x - 3) + 2(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 7 = 0$. Chọn (A).

4. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + 2y + 1 = 0$.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A) $\Delta$ đi qua tâm của (C); B) $\Delta$ cắt (C) tại hai điểm;

C) $\Delta$ tiếp xúc với (C); D) $\Delta$ không có điểm chung với (C).

*Trả lời:*

(C) có tâm $I(2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có: $d(I, \Delta) = \dfrac{|2 + 2 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}$.

Ta có $d(I, \Delta) = R$. Vậy $\Delta$ tiếp xúc với (C). Chọn (C).

5. Đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ có tâm I và bán kính R là:

A) $I(-1; 1)$, $R = 1$; B) $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, $R = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

C) $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, $R = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; D) $I(1; -1)$, $R = \sqrt{6}$.

*Trả lời:*

(C): $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{1}{2}, c = -1$

Vậy (C) có tâm $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Chọn (B).

6. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây là phương trình của đường tròn: $x^2 + y^2 - 2(m + 2)x + 4my + 19m - 6 = 0$?

A) $1 < m < 2$; B) $-2 \le m \le 1$;

C) $m < 1$ hoặc $m > 2$; D) $m < -2$ hoặc $m > 1$.

*Trả lời:*

(C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$a = m + 2$; $b = -2m$, $c = 19m - 6$

(C) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0$

$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$. Chọn (C).

**17.** Đường thẳng Δ: $4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ khi:

A) $m = 3$; B) $m = \pm 5$; C) $m = 1$; D) $m = 0$.

***Trả lời:***

(C) có tâm O(0; 0) bán kính R = 1.

Δ tiếp xúc với (C) ⇔ d(O, Δ) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1 \Leftrightarrow |m| = 5 \Leftrightarrow m = \pm 5. \text{ Chọn (B).}$$

**18.** Cho hai điểm A(1; 1) và B(7; 5). Phương trình đường tròn đường kính AB là:

A) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$; B) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$;

C) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$; D) $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 12 = 0$.

***Trả lời:***

Ta có: A(1; 1), B(7; 5). Gọi I là tâm của đường tròn đường kính AB,, tọa độ của I là I(4; 3), bán kính $R = IB = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Vậy (C) có phương trình $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0. \text{ Chọn (B).}$$

**19.** Đường tròn đi qua ba điểm A(0; 2), B(−2; 0) và C(2; 0) có phương trình là:

A) $x^2 + y^2 = 8$; B) $x^2 + y^2 + 2x + 4 = 0$;

C) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$; D) $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

***Trả lời:***

($\mathscr{C}$): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Vì A, B, C ∈ ($\mathscr{C}$) nên $\begin{cases} 4 - 4b + c = 0 \\ 4 + 4a + c = 0 \\ 4 - 4a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -4 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy ($\mathscr{C}$): $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Chọn (D).

**20.** Cho điểm M(0; 4) và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$. Tìm phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

A) M nằm ngoài (C); B) M nằm trên (C);

C) M nằm trong (C); D) M trùng với tâm của (C).

***Trả lời:***

(C) có tâm I(4; 3) và bán kính R = 2, $IM = \sqrt{17} > R$. Vậy M nằm ngoài (C). Chọn (A).

**21.** Cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và cho các mệnh đề:

(I) (E) có các tiêu điểm là $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$;

(II) (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$;

(III) (E) có đỉnh $A_1$ (–5; 0);

(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A) (I) và (II); B) (II) và (III); C) (I) và (III); D) (IV) và (I).

*Giải:*

Ta có a = 5, b = 3, c = 4. Độ dài trục nhỏ 2b = 6. Mệnh đề (I), (II), (III) đúng, mệnh đề (IV) sai. Chọn (D).

22. Phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh (–3; 0), (3; 0) và hai tiêu điểm (–1; 0), (1; 0) là:

A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$; B) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$; C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$; D) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$.

*Giải:* $a = 3, c = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$

Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. Chọn (C).

23. Cho elip (E) : $x^2 + 4y^2 = 1$ và cho các mệnh đề:

(I) (E) có trục lớn bằng 1; (II) (E) có trục nhỏ bằng 4;

(III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A) (I); B) (II) và (IV); C) (I) và (III); D) (IV).

*Trả lời:*

$$(E)\ x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1 \Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(E) có trục lớn 2a = 2

trục nhỏ 2b = 1

Tiêu điểm $F_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. Tiêu cự $2c = \sqrt{3}$. Chọn (D).

24. Dây cung của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0 < b < a)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là:

A) $\frac{2c^2}{a}$; B) $\frac{2b^2}{a}$; C) $\frac{2a^2}{c}$; D) $\frac{a^2}{c}$.

*Trả lời:*

Tung độ giao điểm của (E) và Δ: x = c được xác định bởi phương trình:

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2) \Leftrightarrow y^2=\frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow y=\pm\frac{b^2}{a}$$

Δ cắt (E) tại $M(c\ ;\ \frac{b^2}{a})$ và $N(c\ ;\ -\frac{b^2}{a})$.

Ta có: $MN=\frac{2b^2}{a}$. Chọn (B).

**25**. Một elip có trục lớn bằng 26, tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$. Trục nhỏ của elip bằng bao nhiêu?

A) 5; B) 10; C) 12; D) 24.

*Trả lời:*

Ta có $2a = 26 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow c = 12$

$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

Vậy 2b = 10. Chọn (B).

**26**. Cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A) (E) có trục lớn bằng 6; B) (E) có trục nhỏ bằng 4;

C) (E) có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$; D) (E) có tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

*Trả lời:*

(E): $4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Ta có: $a = 3;\ b = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

(E) có tiêu cự là $2c = 2\sqrt{5}$. Chọn (C).

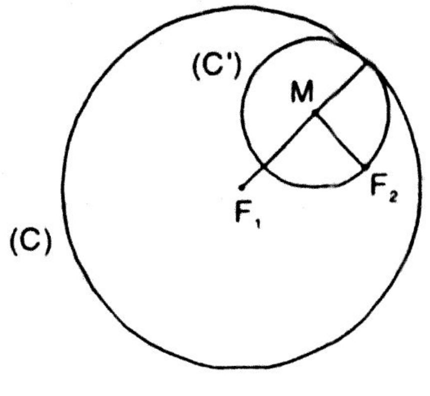
**27**. Cho đường tròn (C) tâm $F_1$ bán kính 2a và một điểm $F_2$ ở bên trong của (C). Tập hợp tâm M của các đường tròn (C') thay đổi nhưng luôn đi qua $F_2$ và tiếp xúc với (C) là đường nào sau đây?

A) Đường thẳng;

B) Đường tròn;

C) Elip;

D) Parabol.



*Trả lời:*

Gọi r là bán kính của (C') ta có:

$F_1M = 2a - r,\ F_2M = r \Rightarrow F_1M + F_2M = 2a$

Vậy M di động trên một elip. Chọn (C).

28. Khi cho t thay đổi, điểm M(5cost; 4sint) di động trên đường nào sau đây?

A) Elip; B) Đường thẳng; C) Parabol; D) Đường tròn.

*Trả lời:*

Tọa độ điểm M: $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{5} \\ \sin t = \dfrac{y}{4} \end{cases}$

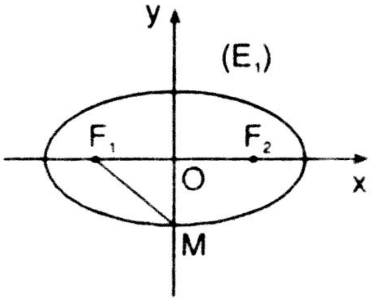
Suy ra $\left(\dfrac{x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

M di động trên một đường elip. Chọn (A).

29. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$. Gọi $F_1$, $F_2$ là hai tiêu điểm và chọn điểm M(0; –b). Giá trị nào sau đây bằng giá trị của biểu thức $MF_1.MF_2 - OM^2$?

A) $c^2$; B) $2a^2$;

C) $2b^2$; D) $a^2 - b^2$.



*Trả lời:*

Vì M(0; –b) là một đỉnh trên trục nhỏ của elip nên ta có $MF_1 = MF_2$

Suy ra: $MF_1.MF_2 - OM^2 = MF_1^2 - OM^2$

$= b^2 + c^2 - b^2 = c^2$. Chọn (A).

30. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $\Delta$: $y + 3 = 0$. Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của (E) đến đường thẳng $\Delta$ bằng giá trị nào sau đây?

A) 16; B) 9; C) 81; D) 7.

*Giải:*

Do đường thẳng $\Delta$ vuông góc với Oy tại $B_1(0; -3)$ nên ta có:

$d(F_1, \Delta) = d(F_2, \Delta) = b$.

Suy ra: $d(F_1, \Delta).d(F_2, \Delta) = b^2 = 9$. Chọn (B).

# ÔN TẬP CUỐI NĂM

**1.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a},\vec{b}) = 120^\circ$. Với giá trị nào của m thì hai vectơ $\vec{a} + m\vec{b}$ và $\vec{a} - m\vec{b}$ vuông góc với nhau?

*Giải*

$$(\vec{a} + m\vec{b}) \perp (\vec{a} - m\vec{b}) \Leftrightarrow (\vec{a} + m\vec{b}).(\vec{a} - m\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2 - m^2\vec{b}^2 = 0 \Leftrightarrow 9 - 25m^2 \Leftrightarrow m = \pm\frac{3}{5}.$$

**2.** Cho tam giác ABC và hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$.

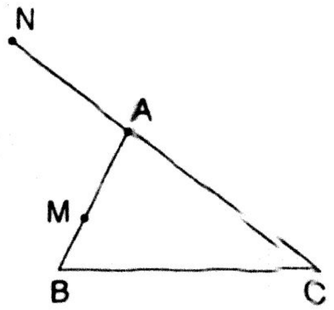
a) Hãy vẽ M, N khi $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{2}{3}$.

b) Hãy tìm mối liên hệ giữa $\alpha$ và $\beta$ để MN song song với BC.

*Giải*

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



b) Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-\alpha}{-1} = \frac{\beta}{1} \\ \alpha \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta, \alpha \neq 1$$

**3.** Cho tam giác đều ABC cạnh a.

a) Cho M là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo a;

b) Cho đường thẳng d tuỳ ý, tìm điểm N trên đường thẳng d sao cho $NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất.

*Giải*

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

a) Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC$ thì G cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$$= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2$$

$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 3GM^2 = 6R^2 = 6.\frac{a^2}{3} = 2a^2.$$

b) Ta có: $NA^2 + NB^2 + NC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GN^2$

$\Rightarrow NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất khi GN nhỏ nhất tức là khi N là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G lên d.

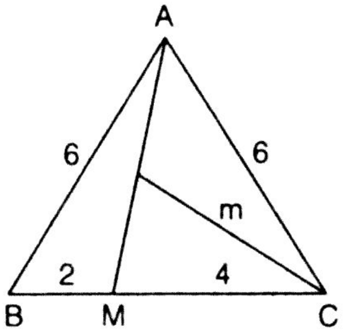
4. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 6cm. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho BM = 2cm.

a) Tính độ dài của đoạn thẳng AM và tính côsin của góc $\widehat{BAM}$;

b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM;

c) Tính độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh C của tam giác ACM;

d) Tính diện tích tam giác ABM.



*Giải*

a) Xét tam giác ABM

Theo định lí côsin ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos 60^\circ$$

$$= 6^2 + 2^2 - 2.6.2.\frac{1}{2} = 36 + 4 - 12 = 28$$

Vậy $AM = \sqrt{28}$ (cm)

$$\Rightarrow \cos\widehat{BAM} = \frac{AM^2 + AB^2 - BM^2}{2AM.AB} = \frac{28 + 36 - 4}{2.\sqrt{28}.6} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

b) Xét tam giác ABM, theo định lí sin ta có: $\frac{AM}{\sin B} = 2R = \frac{\sqrt{28}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$

Vậy: $R = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ (cm)

c) Gọi m là độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh C của tam giác ACM. Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác ta có:

$$m^2 = \frac{AC^2 + MC^2}{2} - \frac{AM^2}{4} = \frac{6^2 + 4^2}{2} - \frac{28}{4} = \frac{52}{2} - 7 = 19 \Rightarrow m = \sqrt{19} \text{ (cm)}$$

d) Gọi S là diện tích tam giác ABM

Ta có $S = \frac{1}{2}BA.BM.\sin B = \frac{1}{2}.6.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Vậy: $S = 3\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

5. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $a = b\cos C + c\cos B$;

b) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$;

c) $h_a = 2R\sin B\sin C$.

*Giải*

a) Áp dụng định lí cosin ta có:

$$b\cos C + c\cos B = \frac{b(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} + \frac{c(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = a.$$

b) Theo câu a) ta có: $a = b\cos C + c\cos B$ (1)

Theo định lí hàm số sin ta có: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Thay các giá trị này của a, b, c vào (1) ta có:

$$2R\sin A = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B.$$

c) Theo công thức tính diện tích tam giác ABC ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A \ (2)$$

Thay $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ vào (2) ta có:

$$\frac{1}{2}2R\sin A\, h_a = \frac{1}{2}2R\sin B.2R\sin C.\sin A \Leftrightarrow h_a = 2R\sin B\sin C.$$

**6.** Cho các điểm A(2; 3), B(9; 4), M(5; y) và P(x; 2).

a) Tìm y để tam giác AMB vuông tại M;

b) Tìm x để ba điểm A, P và B thẳng hàng.

*Giải*

a) Ta có: $\overrightarrow{AM} = (3; y - 3)$; $\overrightarrow{BM} = (-4; y - 4)$

Tam giác AMB vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow 3.(-4) + (y - 3).(y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -12 + y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 7 \end{array}\right.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AP} = (x - 2; -1)$

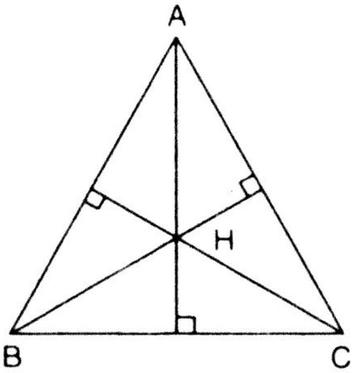
$\overrightarrow{AB} = (7; 1)$

Ta có: A, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}$.

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{7} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow (x - 2).1 - (7).(-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

**7.** Cho tam giác ABC với H là trực tâm. Biết phương trình của đường thẳng AB, BH và AH lần lượt là: $4x + y - 12 = 0$; $5x - 4y - 15 = 0$ và $2x + 2y - 9 = 0$. Hãy viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.

*Giải*



Ta có $A = AB \cap AH$ nên $A(\frac{5}{2}; 2)$

$B = AB \cap BH$ nên $B(3; 0)$

$H = BH \cap AH$ nên $H\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{6}\right)$

Ta có: $AC \perp BH \Leftrightarrow AC$: $4x + 5y + c_1 = 0$.

$A \in AC \Leftrightarrow 10 + 10 + c_1 = 0$

$\Leftrightarrow c_1 = -20$

Vậy phương trình đường thẳng AC là:

$4x + 5y - 20 = 0$.

Ta có: $BC \perp AH \Leftrightarrow x - y + c_2 = 0$;

$B \in BC \Leftrightarrow 3 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -3$

Vậy phương trình đường thẳng BC là: $x - y - 3 = 0$.

Ta có: $CH \perp AB \Leftrightarrow CH$ là: $x - 4y + c_3 = 0$;

$H \in CH \Leftrightarrow \frac{11}{3} - \frac{10}{3} + c_3 = 0 \Leftrightarrow c_3 = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình đường thẳng CH là: $x - 4y - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x - 12y - 1 = 0$

8. Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta$: $4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng:

$d_1$: $x + y + 4 = 0$ và $d_2$: $7x - y + 4 = 0$.

*Giải*

Xét đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Ta có: $I(a; b) \in \Delta \Leftrightarrow 4a + 3b - 2 = 0$ (1)

Ta có: $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với $d_1$ và $d_2 \Leftrightarrow d(I, d_1) = d(I, d_2)$.

$$\Leftrightarrow \frac{|a + b + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a - b + 4|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow 5|a + b + 4| = |7a - b + 4|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5a + 5b + 20 = 7a - b + 4 \\ 5a + 2b + 20 = -7a + b - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a - 3b - 8 = 0 & (2) \\ 3a + b + 6 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

* Giải hệ (1) và (2) ta được $a = 2$ và $b = -2$

$R = d(I, d_1) = 2\sqrt{2}$

Ta có $(\mathscr{C}_1)$: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

* Giải hệ (1) và (3) ta được $a = -4$, $b = 6$, $R = 3\sqrt{2}$

Ta có $(\mathscr{C}_2)$: $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$.

**9.** Cho elip (E) có phương trình: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

a) Hãy xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm của elip (E) và vẽ elip đó;

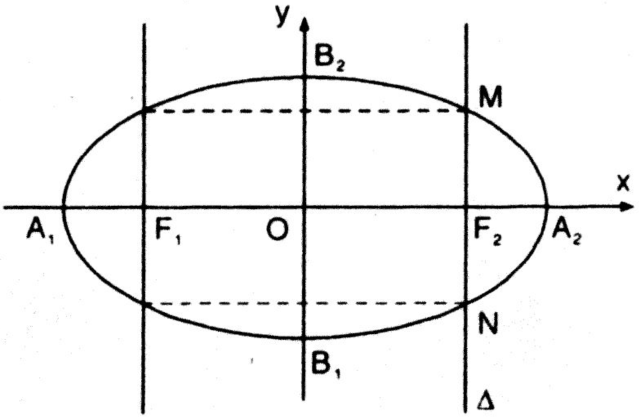
b) Qua tiêu điểm của elip dựng đường thẳng song song với Oy và cắt elip tại hai điểm M và N. Tính độ dài đoạn MN.

*Giải*

a) $a = 10, b = 6 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow c = 8$

(E) có các đỉnh: $A_1(-10; 0)$, $A_2(10; 0)$, $B_1(0; -6)$, $B_2(0; 6)$

Tiêu điểm: $F_1(-8; 0)$, $F_2(8; 0)$.



b) Đường thẳng Δ đi qua $F_2(8; 0)$ và song song với Oy có phương trình: $x = 8$.

Ta có tung độ giao điểm của (E) và Δ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{64}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{18}{5}$$

Ta có: $M\left(8; \frac{18}{5}\right)$ và $N\left(8; -\frac{18}{5}\right)$

Vậy: $MN = |y_M - y_N| = \frac{36}{5}$.

# MỤC LỤC

## *CHƯƠNG I.*

## VECTƠ

§1. Các định nghĩa ........ 5

§2. Tổng và hiệu của hai vectơ ........ 7

§3. Tích của vectơ với một số ........ 12

§4. Hệ trục tọa độ ........ 17

**Ôn tập chương I** ........ 22

## *CHƯƠNG II.*

## TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ $0^0$ đến $180^0$ ........ 34

§2. Tích vô hướng của hai vectơ ........ 37

§3. Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác ........ 41

**Ôn tập chương II** ........ 47

## *CHƯƠNG III.*

## PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Phương trình đường thẳng ........ 56

§2. Phương trình đường tròn ........ 62

§4. Phương trình đường elip ........ 66

**Ôn tập chương III** ........ 69

**Ôn tập cuối năm** ........ 82

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
*Điện thoại : Biên tập-Chế bản: (04) 3971 4896;*
*Hành chính: (04) 3971 4899; Tổng Biên tập: (04) 3971 4897; Fax : (04) 3971 4189*

---

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*
***Giám đốc*** : **PGS.TS. PHÙNG QUỐC BẢO**
***Tổng biên tập*** : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**
*Biên tập* : Anh Thư
*Chế bản* : Diệu Tâm
*Trình bày bìa* : Công ty Sách Hoa Hồng
*Đối tác liên kết xuất bản* : Công ty Sách Hoa Hồng

---

***GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10***

---

Mã số : 1L-287ĐH2009
In 5.000 cuốn, khổ 16 × 24cm in tại Công ty CP In Tiến Giang.
Số xuất bản: 957-2009/CXB/10-182/ĐHQGHN, ngày 16/10/2009.
Quyết định xuất bản số : 287LK-TN/XB ngày 20/10/2009.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.